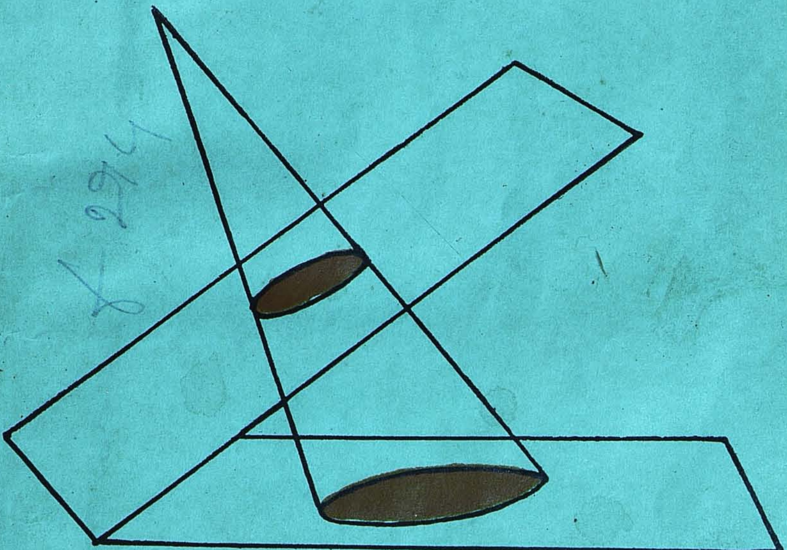
வீழல் முறை வரை கணிதம்

— மகாதேவன் (ரா)

வீழல் முறை வரைகணிதம்

(PROJECTIVE GEOMETRY)



ரா. மகாதேவன்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் — 339

வீழல்முறை வரைகணிதம்

ஆசிரியர்

ரா. மகாதேவன்,
கணிதப் பேராசிரியர்
மாநிலக் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—August, 1972

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 339

© Tamil Nadu Text Book Society

PROJECTIVE GEOMETRY

R. MAHADEVAN

Price Rs. 4-50

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by
STREE SEVA MANDIR PRESS,
66, Bazlullah Road, Madras-17.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி - உள்ளாட்சித் துறை அமைச்சர்

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பன்னிரண்டாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968 ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.) 1969 ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில், நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'வீழல்முறை வரைகணிதம்' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 339 ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 374 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந்நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை : ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

முகவுரை

இந்த நூல், B.Sc. கணிதச் சிறப்புப் பிரிவுக்கு விருப்பப் பாடமாகவுள்ள பாடத்திட்டத்தை ஒட்டி எழுதப்பட்டுள்ளது. 1971-ல் பல்கலைக்கழகத் திட்டப்படி பல்வேறு விருப்பப் பாடங்களில் வரைகணிதமும் ஒன்றாகும். அதன் ஒரு பகுதி வீழல்முறை வரை கணிதம். இது, T. E. Faulkner, M.A., Ph.D. (Oliver and Boyd) என்பவர் எழுதிய 'Projective Geometry' எனும் நூலையொட்டிக் கற்பிக்கப்பட வேண்டும் என்றதால், இந்நூலும் அதையொட்டியே எழுதப்பட்டுள்ளது. மேலும் இந்த நூல், H. F. Baker, Sc.D., LL.D., F.R.S. (Cambridge, 1943) என்பவர் 'An Introduction to Plane Geometry' எனும் நூலை எழுதிய முறையில் எழுதப் பட்டுள்ளதால், அந் நூலையும் படிப்பவர்கள் பார்க்க வேண்டு மாய்க் கேட்டுக்கொள்ளப்படுகிறது. அன்றியும் கடைசி அத்தி யாயத்திற்கு 'Projective Geometry' *by* C. V. Durret (Macmillan) நூலையும் ஒத்துப் பார்க்கலாம்.

ஆசிரியன்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

1. முன்னுரை 1

2. அமைவுத் தேற்றங்களும், இருபான்மை நெறிக் கோட்பாடும் (Propositions of Incidence and the Principle of Duality) 3

3. அமைவுத் தேற்றங்களின் குறியீட்டு விளக்கம் (Symbolic Notations of the Propositions of Incidence) 11

4. இசைப் பிரிவு (Harmonic Separation) ... 24

5. தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசைகள் (Related Ranges) 34

6. இருபடி வரை (Conic) 64

7. தனிப் புள்ளிகளும் தனிக் கோடும் (Absolute Points and Line) 104

8 கோடு, இருபடி வரை இவற்றின் சமன்பாடு (Equations of Line and Conic) 138

9, இசைப்பண்பு மாற்றம் (Reciprocation) 156

10. புள்ளி, இசைப்பண்பு மாற்றம் (Point Reciprocation) 162

கலைச்சொற்கள் 171

1. முன்னுரை

இந் நூலைத் தொடங்குமுன் ஆதிமுதல் வரைகணித வளர்ச்சியைச் சுருக்கமாகக் கூறவேண்டியது அவசியமாகிறது. வரைகணிதத்தை ஆங்கிலத்தில் 'Geometry' என்று கூறுகிறோம். இதன் பொருள் தரையை அல்லது பூமியை அளத்தல் எனப் பொருளாகும். நேர்கோட்டைக் குறிக்கும் ஆங்கிலச்சொல் 'straight line' என்பது 'stretched linen' அதாவது 'நூல் பிடித்தல்' எனும் பொருளிலிருந்து தோன்றியதாகும். இவ்வாறு முதன் முதல் பரப்பளவை, கொள்ளளவை இவற்றைத் தரும் சூத்திரங்கள், பல்வேறு வடிவமான பாத்திரங்கள் முகக்கும் அளவை பற்றிக் கூறும் சூத்திரங்கள், இவை கொண்டனவாக வரைகணிதம் தோன்றியது.

சுமார் 600 B.C.-யிலிருந்து 300 B.C. வரை கிரேக்க நாகரிகம் தழைத்தோங்கித் தாழ்ந்த காலம் எனலாம். பயனைக் கருதாது அறிவை வளர்ப்பதற்கெனவே பல கிரேக்க அறிஞர்கள் இக் காலத்தில் தோன்றினர். இவர்கள் காலத்தில்தான் தற்போதைய கணிதச் சிந்தனைக்கு வித்திடப்பட்டது. வரைகணிதம் மூலம், கணித வளர்ச்சிக்கு அடிக்கல் நாட்டினர். நேர்கோடு, புள்ளி, வட்டம், முக்கோணம் முதலியன மற்றவர்களுக்குக் காட்சிப் பொருளாயினும், கிரேக்க அறிஞர்களுக்கு அவை கருத்துப் பொருளாயின.

அந்தக் காலத்தில் சிதறிக் கிடந்த பல வரைகணித உண்மைகளைச் சீராகத் தொகுத்து 'அடிப்படை' எனப் பொருள்படும் 'Elements' எனும் நூலை வெளியிட்டவர் சுமார் 300 B.C. யில் வாழ்ந்த யூக்லிதர் (Euclid) ஆவார். அவர் அலெக்சாந்திரியா பல்கலைக்கழகக் கணிதப் பேராசிரியர் ஆவார். பத்து எடுகோள்களையும், ஒருசில விதிகளையும் கொண்டு, அக்காலத்து வரைகணித உண்மைகள் பலவற்றை, ஒன்றற்கொன்று முரணில்லாது சங்கிலிக் கோவையாக விதி வழி நிறுவினர் (deductive

proofs). இத்தகைய நூல், முறையின் சிறப்பால், அறிவு வளர்ச்சிக்கு உகந்தது எனக் கருதப்பட்டு ஒரு சில மாற்றத்தோடு இன்னும் உயர்நிலைப் பள்ளிகளில் பயிலப்படுகிறது.

பதினேழாம் நூற்றுண்டுத் தொடக்கத்தில் ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் பொற்காலம் தொடங்கியது. அதுவரை 'மூத்தோர் கூறியதைக் குறை கூறலாகாது' எனக் கூறிய பலவற்றை ஆராய்ச்சிக் கண்ணேட்டத்தில் தீர விசாரிக்கத் தொடங்கினுர்கள். இதன் பயனுய் வரைகணிதத்திலும் மாற்றம் வரலாயிற்று. 'கந்தழிப்புள்ளி' (point at infinity) எனும் கருத்தைத் தோற்றுவித்தவர் தேசார்கஸ் (Desargues, *1593–1661*) ஆவார். இயல் கணித முறையில் வரைகணிதம் பயிலும் முறையைத் தோற்றுவித்தவர் தேகார்டஸ் (Descartes, *1596–1650*). 'கற்பனைப் புள்ளிகள்' எனும் கருத்துக்கு ஆதாரமானவர் பான்ஸ்லே (Ponselet, *1788–1867*). முதலில் யூக்லித வரைகணிதத்தின் அடிப்படையில் தூரம் எனும் கருத்தைத் தழுவி 'வீழல்முறை வரைகணிதம்' எனும் புதுமுறை வரைகணிதம் தோன்றியது. இதன் நோக்கம், அதுவரை கண்டறியாத பல உண்மைகளைத் தெளிவித்தலும், யூக்லித முறையில் கண்ட பல உண்மைகளை எளிதில் காண்பதாகவும் இருந்தது. வீழல் முறை வரைகணிதத்தை இயல்கணித முறையில் விளக்க முற்பட்டபோது பயன்படுத்தப்பட்டச் சமச்சீர்க் கூறுகள் (homogeneous co-ordinates), தூரக் கருத்தைத் தரும் பரப்புக் கூறுகள் (areal co-ordinates), குத்துக்கூறுகள் (triliniar co-ordinates) முதலியவையாகும்.

யூக்லித முறையைச் சாராமல், தூரம், கோணம் முதலிய கருத்தை ஒட்டாமல், தனித்து நிற்கக்கூடிய, பொது முறை வீழல் வரைகணிதத்தைத் தோற்றுவித்தவர் வான் ஸ்டாட் (Von Staudt, *1798-1867*) எனும் ஜெர்மன் பேரறிஞராவார். இவர் தொகுமுறையில் (அதாவது விளக்கப்படாத சில சொற்கள்—சில எடுகோள்கள் இவற்றைக் கொண்டு) விதிவழி (synthetic deductions) முடிவுகளைக் காணும் வழியை வகுத்தார். புதுமுறை இயற்கணிதம்வழி, மாற்றங்கள் (transformations) நேரிடினும் மாருப் பண்புகளின் (invariants) தொகுதியே வரைகணிதமாகும் என்று சாற்றியவர் ஃபெலிக்ஸ் க்ளைன் (Felix Klein, *1849–1925*) ஆவார்.

இவ்வாறு வரைகணிதம் சென்ற நூற்றுண்டிலிருந்து புதுத் தோற்றமும் பொலிவும் பெறலாயிற்று. இச்சிறு நூலில் ஓரளவுக்கு இப்புது முறையை விவரிப்போம்.

2. அமை தேற்றங்களும் இருபான்மை நெறிக் கோட்பாடும்

(Propositions of Incidence and The Principle of Duality)

2·1. புள்ளி, கோடு, தளம் (Points, Lines, Planes).

வரைகணிதத்தின் மூலாதார உருப்படிகள் (fundamental elements) புள்ளி, நேர்கோடு, சமதளம் என்பனவாம். நேர்கோட்டைக் கோடு என்றே கூறுவோம். சமதளத்தைத் தளம் (plane) என்போம். இவைகளை வரையறையின்றியே கொள்வோம். 'கருத்துப் பொருள்களாகிய' இவற்றிற்கொத்த காட்சிப் பொருள்களை, நாம் வாழ்க்கையில் காண்கிறோம். நீர்ப் பரப்பு, சமதளம் என்கிறோம். தூக்குகுண்டு (plumb line) நேராக நிலக்கோட்டில் தொங்குகிறது என்கிறோம். அடிக் கோல்களினால் நேர்கோட்டை வரைகிறோம் என்கிறோம். இரு நேர்கோடுகள் வெட்டும் இடத்தைப் புள்ளி என்கிறோம். இத் தகைய காட்சிப் பொருள்கள் (concrete objects), கருத்துப் பொருள்களைக் (abstract objects) குறிப்பதாகச் சொல்லலாமே அன்றி, அவைதான் அந்தப் பொருள்கள் என்று கூறமுடியாது. நாமும் நேர்கோடு, புள்ளி இவற்றை விவரிக்கும்போது கோல் களால் நேர்கோட்டை வரைவோம். நேர்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகளைக் குறிப்போம்.

புள்ளி, கோடு, தளம் இவற்றிடையே 'அமைதல்' (incidence) எனும் தொடர்பை எடுகோள்களால் கூறுவோம். இத்தகைய தொடர்பு நமக்குப் புதிதன்று. யூக்லித வரைகணிதத்திலும் அவற்றைக் காண்கிறோம். அவற்றை இங்கே தருவோம்,

(a) இரண்டு வெவ்வேறான புள்ளிகள் மேல், ஒரே ஒரு கோடு மட்டும் அமையும்.

(b) ஒரு கோடமையாத மூன்று வெவ்வேறு புள்ளிகள், ஒரே ஒரு தளத்தை நிச்சயிக்கும். அவ்வாறே ஒரு கோடும், அதன்மேல் அமையாத ஒரு புள்ளியும், ஒரே தளத்தைத் தரும்.

(c) இரண்டு வெவ்வேறான கோடுகள், தளத்தில் அமைவன ஆனால், ஒரே ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் அல்லது இணையாக இருக்கும்.

(d) ஒரு தளத்தமையாத கோடு, தளத்தை ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டும் அல்லது தளத்திற்கு இணையாக அமையும்.

(e) இரண்டு தளங்கள் ஒன்றையொன்று ஒரே ஒரு கோட்டில் வெட்டும் அல்லது இணையாக அமையும்.

இவை, 'தூரம்', 'கோணம்', 'பரப்பு' எனும் அளவுகள் வராத யூக்லித எடுகோள்களாகும். இவற்றை நாம் அறிவோம். மேற்கூறிய புள்ளி, கோடு, தளங்கள் இருக்கும் 'வெளி' (space) யூக்லித வெளி (Euclidean space) எனப்படும்.

வீழல் வரைகணித வெளி (space of projective geometry) இதிலிருந்து ஏற்படுத்துவோம். அதன் பயனாய், இணைகோடுகள் இணைத்தளங்கள் எனும் சிறப்புக் கோடுகள், தளங்கள் இவற்றை நீக்குவோம். யூக்லித புள்ளி கோடு தளங்களுடன், கந்தழிப்புள்ளி (ideal point) கந்தழிக்கோடு (ideal line), கந்தழித்தளம் (ideal plane) இவற்றைச் சேர்ப்போம். இவை எவ்வாறு சேர்க்கப்படுகிறது என்பதைக் கீழே கூறுவோம்.

சாதாரணக் கோடு ஒவ்வொன்றிலும் சாதாரணப்புள்ளிகளையன்றி, கோட்டுக்கு ஒன்றாக ஒரு கந்தழிப்புள்ளியைச் சேர்ப்போம். இரண்டு கோடுகள் இணையாக இல்லை என்றால் அவற்றில் உள்ள கந்தழிப்புள்ளிகள் வெவ்வேறாகும். அவை இணைகோடுகளானால் அவை இரண்டின் கந்தழிப் புள்ளிகளும் ஒன்றே. ஆகவே இரண்டு கோடுகள் இணையாக இல்லை என்றால் எடுகோள்படி, ஒரு புள்ளியில் 'சந்திக்கும்'. இணையாக இருந்தால் கந்தழிப்புள்ளியில் சந்திக்கும். ஆகவே 'வீழல்' வெளியில் உள்ள எந்த இரு கோடும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும்.

ஒரு தளத்தில் அமையும் கோடுகளில் உள்ள கந்தழிப் புள்ளிகள் சேர்ந்த 'கணம்' (set of ideal points of lines of a plane) தளத்தில் உள்ள 'கந்தழிக்கோடு' எனப்படும். இவ்வாறு ஒரு தளத்திற்கு ஒரு 'கந்தழிக்கோடென' அமைகிறது. ஒரு தளத்

தில் உள்ள மற்றச் சாதாரணக் கோடுகளுடன், ஒரு கந்தழிக் கோட்டையும் சேர்க்கிறோம்.

இரண்டு தளங்கள் இணையாக இல்லாவிடில், அவற்றின் கந்தழிக் கோடுகள் வெவ்வேறாகும். இணையானால் இரண்டிற்கும் பொதுவாக உள்ள கோடு கந்தழிக் கோடாகும். இவ்வாறு கந்தழிக் கோட்டைத் தளத்தில் சேர்ப்பதால், இரண்டு தளங்கள், அவை யாதாயினும், ஒன்றை யொன்று ஒரே கோட்டில் வெட்டிக்கொள்கின்றன எனக் கூற முடிகிறது.

இவ்வாறு அமைக்கப் பெற்ற 'வெளியில்' உள்ள தளங்களின் கந்தழிக் கோடு, அல்லது புள்ளிகள் சேர்ந்துள்ள தளம் கந்தழித்தளம் (ideal plane) எனப்படும். இவ்வாறு சாதாரண யூக்லித முப்பரிமாண வெளியில், கந்தழிப்புள்ளி, கோடு, தளம் சேர்க்க (augumented) வருவது 'வீழல் வரைகணித வெளி' (projective space) எனப்படும்.

இந்த வெளியில், உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் ஒரே தன்மையாகக் கருதுகிறோம். எல்லாக் கோடுகளையும், தளங்களையும் ஒரே தன்மையாகக் கருதுகிறோம். ஆகவே கீழ் வரும் எடுகோள்களைக் கூறுகிறோம்.

2·2. அமைவு எடுகோள்கள்

(i) **வெவ்வேறான இரண்டு புள்ளிகளின்மேல் ஒரே ஒரு கோடு அமைகிறது :** A, B என்பவை இரண்டு புள்ளிகள். அவை ஒரே ஒரு கோட்டைத் தரும். கோடென்பது எண்ணற்ற புள்ளிகள் கொண்டது. A, B தரும் கோட்டில் C என்பது இன்னொரு புள்ளியானால் A, C என்பவை தரும் கோடும் அதுவே. அதில் B அமைந்துள்ளது. மூன்றோ, அல்லது அதற்கு மேற்பட்டோ புள்ளிகள் ஒரே கோட்டைச் சார்ந்ததானால் அவை கோடமை (collinear) புள்ளிகள் எனப்படும்.

(ii) **ஒரு கோடமையாத வெவ்வேறான மூன்று புள்ளிகள்மேல் ஒரே ஒரு தளம் அமையும் :** A, B, C என்பவை ஒரு கோடமை புள்ளிகளல்லவானால் அவை ஒரு தளத்தைத்தரும். D என்பது அத்தகைய தளத்தில் இன்னொரு புள்ளியானால் (AB என்னும் கோட்டிலும் அமையாவிடில்) A, B, D எனும் புள்ளிகள் மேல் அமையும் தளமும் அதுவே. C அதில் அமையும்.

A, B என்பவை ஒருதளத்தில் அமையும் இருபுள்ளிகள் என்றால் A, B மேல் (முதல் எடுகோள்படி) அமையும் கோட்டில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் அந்தத் தளத்தில் அமையும். ஆகையால்

AB என்ற கோடும், *C* என்ற, அதன்மேல் இல்லாத ஒரு புள்ளியும் ஒரே ஒரு தளத்தைத் தரும் எனவும் கூறலாம். அதாவது ஒரு புள்ளி அதன்மேல் அமையாத ஒரு கோடு இவற்றின்மேல் ஒரே ஒரு தளம் அமையும் எனவும் இந்த எடுகோளைக் கூறலாம்.

இரண்டு கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் அமைந்தால் (அதாவது வெட்டிக் கொண்டால்) அவற்றின்மேல் அமையும் தளமும் ஒன்றே யொன்று ஆகும். ஏனெனில் இரண்டு கோடுகளுக்கும் பொது வான புள்ளி *C* ஆகுக: ஒருகோட்டில் *A* எனும் புள்ளியையும், மற்றொரு கோட்டில் *B* எனும் புள்ளியையும் கொள்க. *A*, *B*, *C* எனும் மூன்று புள்ளிகள் மேலும் ஒரே ஒருதளம் உள்ளது. *AC* *BC* எனும் கோடுகள் இந்தத் தளத்தில் அமைகின்றன. அதாவது வெட்டிக்கொள்ளும் இருகோடுகள் ஒரே ஒரு தளத்தைத் தருகின்றன.

(iii) ஒரே தளத்தில் அமையும் இரு கோடுகள் (தளத்தில் உள்ள) ஒரே ஒரு புள்ளிமேல் அமைகின்றன. அதாவது ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

(iv) ஒரு தளத்தில் அமையாத ஒரு கோடு, தளத்தை ஒரே யொரு புள்ளியில் வெட்டும்.

(v) இரண்டு வெவ்வேறான தளங்கள் ஒன்றையொன்று ஒரே ஒரு கோட்டில் வெட்டிக்கொள்ளும்.

என 5 எடுகோள்களை, யூக்லித வெளிக்குக் கூறப்பட்டவை களிலிருந்து ' இணை ' என்பதை நீக்கி எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

இவை யாவும் ஒன்றையொன்று சார்ந்ததல்ல (independent) எனக் கூறவில்லை. ஒன்றையொன்று சாராத மிகக் குறைந்த எண்ணிக்கையுள்ள எடுகோள்களைக் கொண்டுதான், நூலை விவரிக்கவேண்டுமென்பதில்லை. மிகவும் பயனுடைய எடுகோள் களையே கூறியுள்ளோம்.

ஐந்தாவது எடுகோள், மற்றதிலிருந்து வருவதைக் காண லாம். இரண்டு தளங்களை π_1, π_2 என்று குறிப்போம். π_1ல் *O* எனும் புள்ளியாகுக. *O* வழி π_1ல் அமையும் இரு கோடுகள் l_1, l_2 என்பவற்றைக் கொள்க. நான்காவது எடுகோள்படி π_2 வை l_1 ஒரு புள்ளி *A*-யிலும், l_2 மற்றொரு புள்ளி *B*-யிலும் வெட்டும். ஆகவே *A*, *B* எனும் புள்ளிகள் π_1, π_2 எனும் இரு தளங்களிலும் உள்ளன *A*, *B* எனும் புள்ளிகள் வழி ஒரே ஒரு கோடமையும் எடுகோள்படியும், கோட்டில் உள்ள புள்ளிகள் யாவும் *AB* அமையும் தளத்தில் இருக்க வேண்டும் என்றதாலும்,

AB எனும் கோடு π_1, π_2 என்ற இருதளங்களுக்கும் பொது. இவ்வாறு உள்ள கோடு ஒன்றேயாதலால் இருதளங்கள் ஒரே யொரு கோட்டில் மட்டுமே வெட்டிக்கொள்ளும் எனும் எடுகோள் புலனாகிறது.

2·3. மூன்று தளங்கள், ஒரே கோட்டில் வெட்டாவிடில் ஒரே ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

π_1, π_2, π_3 என்பவை மூன்று தளங்களாகுக,

π_1, π_2 இவை வெட்டும் கோடு [5வது எடுகோள்] l_3

π_2, π_3 ,, ,, ,, l_1

π_3, π_1 ,, ,, ,, l_2 ஆகுக.

l_1, l_2 எனும் கோடுகள் π_3 எனும் தளத்தில் அமைவதால் [3வது எடுகோள்] ஒரே ஒரு புள்ளி *A*யில் சந்திக்கின்றன.

∴ *A* எனும் புள்ளி π_1, π_2, π_3 மூன்றிற்கும் பொதுப்புள்ளி.

A ஒரே ஒரு புள்ளியாகையால் மூன்றுதளங்களுக்கும் பொது வாக ஒரே ஒரு புள்ளி உள்ளது.

குறிப்பு 1. π_1, π_2 எனும் தளங்களுக்குப் பொதுவான புள்ளிகள் யாவும் l_3இல் அமைய வேண்டும். ஆகையால் *A* எனும் பொதுப்புள்ளியின்மேல் l_3யும் அமையவேண்டும். மூன்று தளங்கள் இரண்டிரண்டாக வெட்டிக் கொள்ளக் கிடைக்கும் மூன்று கோடுகள் ஒரு புள்ளிமேல் செல்லும் கோடுகளாகும்.

குறிப்பு 2. l_1, l_2 வெவ்வேறான கோடுகள் அல்லவானால், l_3 எனும் கோடும் அவற்றுடன் ஒன்றுகிறது (coincides). மூன்று தளங்கள், ஒருகோடமைத் தளங்கள் எனப்படும்.

2·4. இருபான்மை நெறித் தத்துவம் (Principle of Duality).

அமைவுத் தேற்றங்கள் எனப்படும் எடுகோள்களை ஆராயு மிடத்து இருபான்மைத் தொடர்பு காணப்படும். இந்தத் தொடர்பு சமதளத்தில் ஒரு மாதிரியாகவும், வெளியில் (in space) வேறு மாதிரியாகவும் இருப்பதைக் காணலாம். இதை விளக்குவோம்.

சமதளத்தில் நாம் காண்பது.

(i) இரு புள்ளிகள்மேல் ஒரேவொரு கோடமையும்.

(ii) இரு கோடுகள்மேல் ஒரேவொரு புள்ளி அமையும்.

முதல் வாக்கியத்தில் புள்ளிக்குப் பதிலாக 'கோடு' எனவும் கோட்டிற்குப் பதிலாகப் 'புள்ளி' எனவும் மாற்ற, இரண்டாவது வாக்கியம் தொடருகிறது. 'ஒரு கோடமை புள்ளிகள்' எனும் சொற்றொடரை 'ஒரு புள்ளி அமை கோடுகள்' என மாற்ற இன்னொரு தொடர்பு வருகிறது. ஒன்று மற்றதன் 'இருபான்மைத் தொடர்பு' (Dual relation) எனப்படும். 'புள்ளியின்' இருபான்மை உருப்படி கோடு; 'கோட்டின்' இருபான்மை உருப்படி புள்ளி. இவ்வாறு தளத்தில் 'புள்ளி', 'கோடு' தொடர்பு ஒன்றை நிறுவினால், 'இருபான்மை நெறித் தத்துவப்படி' 'கோடு, புள்ளித் தொடர்பை' உடனே எழுதலாம்.

'இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு' என்பதற்குப் பதில் 'இரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி' எனக் கூறலாம் அல்லது 'சேர்க்கும்', 'வெட்டும்' எனும் வினைகளுக்குப் பதில் 'அமையும்' எனும் ஒரே வினையையும் பயன்படுத்தலாம்.

2·5. 'வெளியில்' (in space) புள்ளி, கோடு, தளங்கள் என மூவகை உருப்படிகள் (objects) உள்ளன. இங்கு 'இருபான்மைத் தொடர்பு' எவ்வாறு காணப்படுகிறதெனப் பார்ப்போம்.

(i) மூன்று புள்ளிகள், அவை ஒரே கோட்டில் அமையாதனவானால், அவற்றின்மேல் ஒரே தளம் அமையும்.

(ii) மூன்று தளங்கள், அவை ஒரே கோடு வழியல்லாதனவானால், அவற்றின்மேல் ஒரேயொரு புள்ளி அமையும். இவ்வாறு தளம், புள்ளி, இவை ஒன்றற்கொன்று இருபான்மை யாகும். கோட்டின் இருபான்மை அதுவே (self dual).

புள்ளி, கோடு, தளங்கள் இவை பற்றிச் சொல்லும் தேற்றத்தில் தளம், கோடு, புள்ளி என மாற்றி (வினைச் சொற்களையும் தக்கவாறு மாற்றி) அமைத்தால் புதிய 'இருபான்மை'த் தேற்றம் வரும். இந்த இருவகை 'இருபான்மை' நெறியையும், சில எடுத்துக் காட்டுகளால் விளக்குவோம்.

2·6. தளத்தில்

எ.கா. 1. A, B, C, D எனும் நான்கு புள்ளிகளில், எதேனும் மூன்று புள்ளிகளைக் கொண்டால் அவை ஒரு கோடமையாதவை. இத்தகைய நான்கு புள்ளிகள் 6 கோடுகளைத் தருகின்றன (புள்ளிகளை இரண்டிரண்டாகக் கொள்ள). இந்த மூன்று ஜோடிக் கோடுகள்- (ஒவ்வொரு ஜோடியிலும் நான்கு புள்ளிகளும் அமைய வேண்டும்)- மூன்று புள்ளிகளைத் தருகின்றன. (BC, AD) தரும் புள்ளி P; (CA, BD) தரும் புள்ளி Q; (AB, CD) தருவது R.

என்றால் ஒரு தேற்றம் நிறுவலாம்; "(*BC*, *QR*), (*CA*, *RP*), *AB*, *PQ*) தரும் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவனவாகும். இந்த நான்கு புள்ளிகளும் சேர்ந்து முழு நாற்கோணம் (complete quadrangle) எனப்படும்.

இதன் இருபான்மை: *a*, *b*, *c*, *d* எனும் நான்கு கோடுகளில் ஏதேனும் மூன்று கோடுகளைக் கொண்டால், அவை ஒரு புள்ளியில் அமையாதவை, இத்தகைய நான்கு கோடுகள் 6 புள்ளிகளைத் தருகின்றன [கோடுகளை இரண்டிரண்டாகக் கொள்ள]. இந்த மூன்று ஜோடிப் புள்ளிகள் [ஒவ்வொரு ஜோடியிலும் நான்கு கோடுகள் அமைய வேண்டும்] மூன்று கோடுகளைத் தருகின்றன. (*bc*, *ad*) தரும் கோடு *p*; (*ca*, *bd*) தருவது *q*; (*ab*, *cd*) தருவது *r*; என்றால் ஒரு தேற்றம் நிறுவலாம், "(*bc*, *qr*), (*ca*, *rp*), (*ab*, *pq*) தரும் கோடுகள் ஒரு புள்ளியமை கோடுகளாகும்".

இந்த நான்கு கோடுகளும் சேர்ந்து முழு நாற்கரம் (complete quadrilateral) எனப்படும்.

[கோடிட்டவை ஒன்றற்கொன்று இருபான்மையாகும்]

ஆகவே முதல் தேற்றத்தை நிறுவினால் அந்த நிரூபணத்தின் ஒவ்வொரு வாக்கியத்திற்கும் தக்க இருபான்மை வாக்கியம் எழுத இரண்டாவது தேற்றத்தின் நிரூபணமாக அமையும்.

எ. கா. 2. *a*, *b*, *c*, *d*, *e* என்பவை ஒரு தளக்கோடுகள் ஆகுக. அவற்றில் எந்த மூன்று கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் அமையாதனவாக வேண்டும் என்றால் கீழ்வரும் 'வரைதலை' (construction) முறைப்படி ஒரு கோட்டில்—*e*-ல் என்போம்— ஒரு புள்ளி *E*-யை நிச்சயிக்க முடியும்.

வரைதல்: (*e*, *a*), (*e*, *d*) எனும் *e*-க்கும் *a*-க்கும்; *e*-க்கும் *d*-க்கும் பொதுவான புள்ளிகளைக் கொள்க. (*e*, *a*) எனும் புள்ளி (*c*, *d*) எனும் புள்ளியைச் சேர்க்கும் கோட்டைக் கொள்க. (*e*, *d*) எனும் புள்ளியையும் (*a*, *b*) எனும் புள்ளியையும் சேர்க்கும் கோட்டைக் கொள்க. இவ்விரு கோடுகளும் *P*-யில் அமையட்டும். *P*-ஐயும், (*b*, *c*) ஐயும் சேர்க்கும் கோடு, *e*-ஐ *E*-யில் சந்திக்கட்டும். இவ்வாறு *E* எனும் தனிப் புள்ளி (unique point) *e*-ல் கிடைக்கிறது.

மேற் கூறியதன் இரு பான்மைக்கூற்று

A, *B*, *C*, *D*, *E* என்பவை ஒரு தளப் புள்ளிகளாகுக. அவற்றுள் எந்த மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோடமையாதனவாக

வேண்டும் என்ருல் கீழ்வரும் 'வரைதல்' முறைப்படி ஒரு புள்ளியில்—*E*-ல் என்போம்—ஒரு கோடு *e*-ஐ நிச்சயிக்க முடியும்.

வரைதல் : (*E*, *A*), (*E*, *D*) எனும் *E*-க்கும் *A*-க்கும், *E*-க்கும் *D*-க்கும் பொதுவான கோடுகளைக் கொள்க. (*E*, *A*) எனும் கோடும், (*C*, *D*) எனும் கோடும் வெட்டும் புள்ளியைக் கொள்க. (*E*, *D*) எனும் கோடும் (*A*, *B*) எனும் கோடும் வெட்டும் புள்ளியைக் கொள்க. இவ் விரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு *p* ஆகுக. *p*-யும் (*BC*) எனும் கோடும் வெட்டும் புள்ளியை *E*-யுடன் சேர்க்க (*e*) எனும் ஒரு தனிக்கோடு *E* வழி கிடைக்கிறது.

2·7. 'வெளியில்' இருபான்மை நெறி

மூன்று மூன்ருக நான்கு தளங்களில் அமையும் நான்கு புள்ளிகள் : எந்த மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோடமையாதன. என்ருல் அவற்ருல் வருவது 6 கோடுகள் ; ஒவ்வொரு கோடும் இரண்டு தளங்களுக்குப் பொதுவானவை.

மேற் கூறிய இருபான்மையை எழுதுவோம். 'மூன்று மூன்ருக நான்கு புள்ளிகளில் அமையும் நான்கு தளங்கள். எந்த மூன்று தளங்களும் ஒரு கோடமையாதன என்ருல் வருவது 6 கோடுகள் : ஒவ்வொரு கோடும் இரண்டு புள்ளிகளுக்குப் பொதுவானவை.' மேற்கூறிய வடிவம் நான்முகத் திண்மம். அதற்கு அதுவே இருபான்மையாகும்.

3. அமைவுத் தேற்றங்களின் குறியீட்டு விளக்கம்

(Symbolic notations of the Propositions of Incidence)

யூக்லித முறை வரைகணிதத்தை இயற்கணிதம் பயன் படுத்திப் பல தேற்றங்களை வரவழைக்கும் முறையைத் தேகார்ட்ஸ் (Descartes) என்பவர் வகுத்தார். புள்ளிகளுக்கென எண் ஜோடிகளைச் சேர்த்து, அவற்றை அதன் கூறுகள் எனச் சொல்லி வரைகணிதத்தில் புதுமுறை ஏற்படுத்தினர். இந்தக் கூறுகள் 'தூரம்,' அல்லது 'கோணம்' இவற்றைக் குறிக்கின்றன இதே போன்று, வீழல்முறை வரைகணிதத்தையும் குறியீடு களால் விளக்கும் வழியை இங்குக் கூறுவோம்.

3·1. குறியீடுகள்

புள்ளிகளை A, B, C ... எனக் குறிப்போம். x, y, z, a, b எனும் எண்களை புள்ளிக் குறியீட்டுக்கு முன் எழுதி அவற்றின் குணகங்கள் என்று கூறுவோம். A, B, C ... என்பவை எண் களல்ல. ஒன்றையொன்று பெருக்கவோ வகுக்கவோ முடியாது ஆனல் எண் குணகங்களுடன் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக (linear aggregate) எழுதி அதற்கு ஒரு பொருளையும் கற்பிப்போம்.

(i) A என்பது எந்தப் புள்ளியைக் குறிக்கிறதோ அதையே pA எனும் குறியீடும் குறிக்கும். அதாவது எண்குணகத்தோடு கூடிய A, அதே புள்ளியைக் குறிக்கும் ($p \neq 0$).

(ii) $pA + qB + rC$, எனும் ஒருபடிச் சேர்க்கையும் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கும். p, q, r எனும் எண்கள் ஒவ்வொன்றையும் ஒரே எண்ணல் பெருக்கவோ வகுக்கவோ செய்தால் வரும் சேர்க்கையும் அதே புள்ளியைக் குறிக்கும்.

(iii) A, B, C எனும் குறியீடுகள் ஒரு கோடமை புள்ளிகளைக் குறித்தால் அதை $pA + qB + rC = 0$ எனும் சமன்பாட்டால் கோடமைவதைக் குறிப்போம். ஆகவே $xA + yB$ எனும் கோவை, AB எனும் கோட்டில் அமையும் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கும் 'இரண்டு புள்ளிகள்மேல் ஒரு கோடமையும்' எனும் அமைவுத் தேற்றத்தின் குறியீடாகிறது. இது கணக்கில் $mA + nB$ என வந்தால், மறுதலையாக, இது A, B எனும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டில் அமையும் புள்ளி ஒன்றைக் குறிக்கிறது எனக் கொள்ளவேண்டும்.

(iv) மேற்கூறிய குறியீடுகள் சாதாரண இயற்கணித விதிகளாகிய, சேர்க்கை விதி (associative), பரவு விதி (distributive), மாற்று விதி (commutative) எனும் விதிகளுக்குட்பட்டதெனக் கொள்வோம். அப்போது $xA+yB$ எனும் கோவை தரும் புள்ளியும், $yB+xA$ எனும் கோவை தரும் புள்ளியும் ஒன்றே. $xA+yA$ எனும் குறியீடு $(x+y)A$ என்ருவதால் A எனும் புள்ளியையே குறிக்கும்.

A, B எனும் புள்ளிவழிச் செல்லும் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகள் $xA + yA$ கோவையாய்த் தரப்படுகின்றன என்ரும். $xA + yB$; $x'A+y'B$ இரண்டு புள்ளிகள் C, D ஆகுக. அப்போது CD எனும் கோட்டைத் தரும் கோவை $p(xA+yB)+q(x'A+y'B)$ ஆகும். இது $px+qx') A+(py+py') B$ ஆவதால் AB எனும் கோடேயாகும். இவ்வாறு அமைவுத் தேற்றத்தில் கூறியபடி A, B எனும் இரு புள்ளிகள் தரும் கோட்டில் எந்த இரு புள்ளிகளும் அதே கோட்டைத் தரும் என்பதை இந்தக் குறியீட்டின் வழியில் காண்கிரும்.

(v) ஒரு கோடமையாத மூன்று புள்ளிகள்மேல் ஒரே ஒரு தளம் அமையும் என்பதை அமைவுத் தேற்றத்தில் கூறியுள்ளோம். A, B, C என்பன அந்தப் புள்ளிகளானல் $xA+yB+zC$ எனும் கோவை அந்தத் தளத்தைக் குறிக்கும். அதாவது அந்தத் தளத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியையும், x, y, z-இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்குத் தரும். $pxA + pyB + pzC$ என்பது $xA+yB+zC$ எனும் புள்ளியேயாகும்.

ஆகவே A, B, C, D என்பவை நான்கும் ஒரே தளத்திஞல் $xA+yB+zC+tD=0$ எனும் சமன்பாடு வரும். இதஞல் தளத்தில் உள்ள எந்த மூன்று புள்ளியும், A, B, C தரும் தளத்தையே தரும்.

$xA+y B+z C+tD=0$ என்ருல்

$xA+yB$-யும், $—zC—tD$-யும் ஒரே புள்ளியைத் தருகின்றன என ஆகிறது. அதாவது தளத்தில் உள்ள AB எனும் கோட்டிற்கும்

CD எனும் கோட்டிற்கும் பொதுவாக ஒரே ஒரு புள்ளி உள்ளது எனவாகின்றது. இவ்வாறு மற்ருெரு அமைவுத் தேற்றத்தைக் குறியீட்டில் காண்கிருேம்.

ஒரு தளத்தை மூன்று புள்ளிகள் நிச்சயிப்பது போன்று நான்கு புள்ளிகள் 'வெளியை' நிச்சயிக்கின்றன. அவை A, B, C, D என்ருல், $xA+yB+zC+tD$ என்பது வெளியில் உள்ள புள்ளிகளைத் தரும். அது $-uE$ என்ருல் $xA+yB+zC+tD+uE=0$ என வருகிறது.

$\therefore$ $xA+yB+zC$ தரும் புள்ளியும் $-tD-uE$ தரும் புள்ளியும் ஒன்றே. அதாவது ABC எனும் தளத்திற்கும் DE எனும் கோட்டிற்கும் பொதுவாக ஒரே ஒரு புள்ளி உள்ளது என்பதைக் குறியீட்டால் காண்கிருேம். இதுவும் அமைவுத் தேற்றங்களில் ஒன்ருகும். இவ்வாறு குறியீடுகளால் அமைவுத் தேற்றங்களைக் குறிக்கிருேம்.

3·2. புள்ளியின் கூறுகள் (Co-ordinates of a point)

A, B என்பவை இரண்டு புள்ளிகளாகுக. AB-யின் மேல் ஒரே ஒருகோடு அமையும். அந்தக் கோட்டில் P என்பது ஒரு புள்ளி என்ருல் $P=xA+yB$ எனவோ, $pP=xA+yB$ எனவோ எழுதலாம் என்று கூறினேம், ஆனல் A எனும் புள்ளியை kA எனவும் B எனும் புள்ளியை lB எனவும் கூறலாம். ஆதலால், P எனும் புள்ளியை, A, B-யின் திட்டவட்டமான எண்குணகங்களால் கூற முடியாத நிச்சயமற்ற நிலை வருகிறது.

இதை நீக்கக் கீழ்க்காணும் முறை கையாளப்படுகிறது. AB-யில் C எனும் புள்ளியை $C = A + B$ எனும்படி எடுத்துக் கொள்ளப் படுகிறது. $xA + yB$ என்ற கோவை, x, y-இன் (இரண்டும் பூச்சியமல்லாத) வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறு புள்ளிகளைத் தருகிறது எனக் கூறினேம்,

(i) இங்கு A, B அவ்வாறே கொள்ளவேண்டு மல்லாது kA, என்ருே lB என்ருே கொள்ளலாகாது,

அப்போது $A = 1.A + 0.B$ ஆகும், $[x = 1;\ y = 0]$

B என்பது $0.A + 1.B$ ஆகும் $[x = 0;\ y = 1]$

C என்பது $1.A + 1.B$ ஆகும் $[x = 1;\ y = 1]$

P என்பது வேருெரு புள்ளியானல்

$P = x_0A + y_0B$ எனக் கூறினல்

(x_0, y_0) என்பது P-யின் கூறுகள் எனப்படும்.

λP என்பதும் P என்பதும் ஒன்றே யாதலால் $(\lambda x_0\ \lambda y_0)$ம் P-யின் கூறுகளே. ஆனால் y கூறு : x கூறு $= y_0 : x_0$ என்பது மாறாது. இவ்வாறு ஒவ்வொரு புள்ளியும் இரு வரிசை எண்களாலோ அல்லது அவற்றின் ஒரே மடங்கெண்களாலோ குறிப்பிடப்படுகிறது. இவ்வாறுள்ள வரிசை எண்கள், புள்ளியின் ஒருபடித்தான கூறுகள் (homogeneous co-ordinates) எனப்படும். A, B எனும் புள்ளிகள் ஆதாரப் புள்ளிகள் எனப்படும். A-யின் கூறுகள் $(1, 0)$: B-யின் கூறுகள் $(0, 1)$; C என்பது அலகு புள்ளி (unit point) எனப்படும்.

குறிப்பு. ஒரு கோட்டில் A, B எனும் புள்ளிகளை ஆதாரப் புள்ளிகளாகக் கொண்டால், கோட்டில் உள்ள எந்தப் புள்ளியை வேண்டுமானாலும் அலகு புள்ளியாகக் கொள்ளலாம். ஏனெனில், D என்பது ஒரு புள்ளியாகுக. பொதுவாக $D = xA + yB$ எனக் கூற முடியும். (குறியீட்டின்படி): $xA = A'$ ஆகுக. $yB = B'$ ஆகுக. $\therefore\ D = A' + B'$. ஆனால் A எனும் புள்ளியும் xA எனும் புள்ளியும் ஒன்றே. அதே போன்று yB எனும் புள்ளியும் B எனும் புள்ளியும் ஒன்றே. xA, B ஐ A, yB எனக் குறிப்பதாகத் திட்டப்படுத்திய பின்னர் D என்பது A, B-ஐச் சார்ந்த அலகு புள்ளியாகிறது.

ஆனால் இவ்வாறு ஆதாரப் புள்ளிகளையும் அலகு புள்ளியையும் திட்டப்படுத்திய பின்னர், மற்றப் புள்ளிகளின் கூறுகள் குறிப்பிட்ட இரு வரிசை எண்களாகவோ (அல்லது அவற்றின் ஒரே மடங்காகவோ) திட்டமாகிறது. $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$ என்பது AB-யின் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளின் கூறுகளை அமைக்கும் 'கூறமைப்புப் புள்ளிகளாகும்', ABயில் உள்ள P எனும் புள்ளியின் கூறு (x, y) எனக் கூறலாம். $(\lambda x, \lambda y)$ என்பதும் அதே புள்ளியாகும். இது P என்பதுவும் λp என்பதுவும் ஒரே புள்ளியைக் குறிக்கும் என்று சொன்னதற்கு முரண்பாடில்லாதபடி இருக்கிறது.

3·3. தளத்தில் புள்ளியின் கூறு

மேலே ஒரு கோட்டில் புள்ளியை இரு வரிசை எண்களால் குறிப்பிடுவதைக் கூறினோம். இங்கு தளத்தில் உள்ள புள்ளிகளின் கூறுகள் என்றால் என்ன என்பதைப்பற்றி விவரிப்போம்.

A, B, C என்ற புள்ளிகள்மேல் ஒரே ஒரு தளம் உள்ளது எனவும் அத்தகைய தளத்தில் வேறெந்த மூன்று புள்ளிகளும் தரும் தளமும் அதுவே எனவும் அமைவுத் தேற்றத்தில் கூறப்பட்டுள்ளது. ஏதேனும் மூன்று புள்ளிகளை (A, B, C ஐ என்க)

ஆதாரப் புள்ளிகளாகக் கொள்வோம். E எனும் புள்ளியை அலகு புள்ளிகளாகக் கொள்வோம். அப்போது $E = A + B + C$ ஆகும். P எனும் புள்ளி $P = xA + yB + zC$ என்றால் P-யின் கூறுகள் (x,y,z) எனும் வரிசை மூன்றெண்களாகும். λp எனும் புள்ளியும் அதுவேயாதலால் $(\lambda x, \lambda y, \lambda z.)$ [λ பூச்சிய மல்லாத வரை] மற்றெல்லா மதிப்புகளுக்கும், அதே புள்ளியைத் தரும்.

குறிப்பு 1. A, B, C என்ற ஆதாரப் புள்ளிகளைக் கொண்டால் எந்தப் புள்ளியை வேண்டுமாயினும் அலகு புள்ளியாகக் கொள்ளலாம்.

$D = x_0A + y_0B + z\ C$ என்றால்

$x_0A = A'$; $y_0B = B'$; $z_0C = C'$ ஆகுக

$\therefore\ D = A' + B' + C'$

ஆனால் A எனும் புள்ளியும் x_0A எனும் புள்ளியும் ஒன்றே யாதலால் x_0A என்பதை A எனலாம். இது போன்றே B', C' எனும் புள்ளிகளும் B, C-ஐக் குறிப்பனவாகும். $\therefore\ D = A + B + C$ யே ஆகும்.

ஆனால் x_0A, y_0B, z_0C என்பது A, B, C ஐக் குறிக்க எனக் கொண்ட பின்னர் அதை மாற்றலாகாது. அப்போது P என்பது தளத்தில் ஒரு புள்ளியானால் $P = xA + yB + zC$ எனத் திட்டமாகக் கூறலாம். P-யின் கூறுகள் (x,y,z) ஆகும். (x,y,z) அல்லது $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, [$\lambda \neq 0$] புள்ளியின் ஒருபடித்தான கூறுகள் (homogeneous co-ordinates) எனப்படும்.

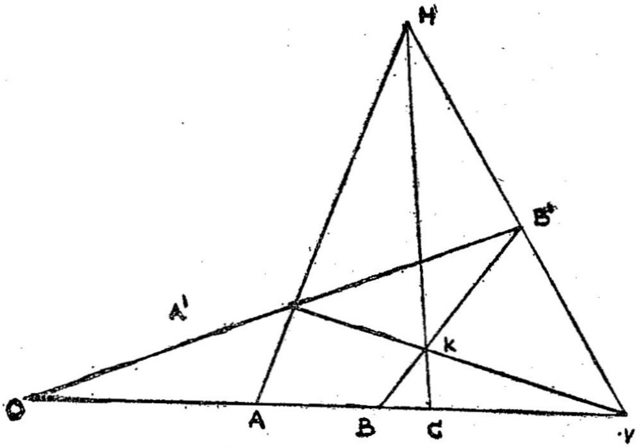
A, B, C-யின் கூறுகள் முறையே $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ $(0,0,1)$ ஆகும். இவைகளை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தை ஆதார முக்கோணம் (reference triangle) என்போம்.

முப்பரிமாண வெளியில் புள்ளியின் கூறுகள் (x, y, z, w) எனும் வரிசை நான்கு எண்களாலோ, அல்லது அவற்றின் மடங்குகளாலோ தரப்படும். A,B,C,D எனும் நான்கு புள்ளிகள் $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ எனக் கொள்ளப்படும். E $(1,1,1,1)$ என்பது அலகு புள்ளியாகும். A,B,C,D என்ற முனைகளுடைய நான்முகி, ஆதார நான்முகி எனப்படும். இது போன்று மேலும் நாற்பரிமாண, ஐம்பரிமாண என விஸ்தரிக்கலாம். ஆனால் நாம் தளத்தில் உள்ள புள்ளி, கோடு, வரை இவைபற்றியே இந் நூலில் கூறப் போகிறோம்.

குறிப்பு 2. 'எண்களால்' கூறுகள் குறிக்கப்படுகின்றன என்றோம். எண்கள், மெய்யெண்களாகவோ, அல்லது கற்பனை எண்களாகவோ (complex numbers) இருக்கலாம். மெய்யெண் களைக் கூறுகளாகவுடைய புள்ளிகள் மெய்ப்புள்ளிகள் (real points) எனப்படும். ஏதேனும் ஒரு எண், கூறுகளில், கலப்பெண் ணுக இருந்தால், அத்தகைய புள்ளி கற்பனைப் புள்ளிகள் எனப் படும். ஆகவே கோட்டிலோ, தளத்திலோ, மெய்ப்புள்ளிகள், கற்பனைப் புள்ளிகள் என இருவகைப் புள்ளிகளும் உள்ளன. கந்தழிக் கோட்டிலும், கந்தழித் தளத்திலும் இத்தகைய இரு வகைப் புள்ளிகள் உள்ளன. புள்ளிக்கூறுகள் கலப்பெண்களாயி னும் விகிதம் மெய்யெண்ணுயின், புள்ளி மெய்ப்புள்ளியே. *(உ–ம்)* (i,2i) என்பது மெய்ப்புள்ளி. (i,2i,3i) என்பது மெய்ப்புள்ளி.

3·4. புள்ளிகளின் 'கூட்டலும்' 'பெருக்கலும்' (Addition and Multiplication of points on a line)

இயற்கணிதத்தில் அடிப்படைக் கிரியைகள் 'கூட்டலும்' 'பெருக்கலும்' ஆகுக. இவைகளுக்கேற்ற 'அமைவு வரைதல்கள்' யாவை என்பதைப் பார்ப்போம்.



படம் 1

OU எனும் புள்ளிகளின்மேல் அமையும் கோட்டில் A, B இரண்டு புள்ளிகள் $A = 0+aU$; $B=0+bU$ ஆகுக. OU வழியுள்ள ஒரு தளத்தில் $OA'\ B'$ எனும் ஏதேனும் ஒரு கோட்டைக் கொள்க

AA' ; $B'V$ எனும் கோடுகள் H எனும் புள்ளியில் சந்திக்கட்டும். BB', $A'V$ எனும் கோடுகள் K-இல் சந்திக்கட்டும். HK எனும் கோடு OV-யை C-யில் சந்திக்கட்டும். அப்போது A, B எனும் புள்ளிகளின் 'கூடுதல்' C எனப்படும்.

ஏனெனில் : OVH எனும் முக்கோணத்தை ஆதார முக்கோணமாகக் கொள்க. A' எனும் புள்ளி AH-ல் இருப்பதால், $A'=0+aV+hH$ எனலாம். இதை $A'-0=aV+hH$ எனவும் எழுதலாம். $A'-0$ என்பது $A'0$-விலும் VH-லும் உள்ள புள்ளியைக் குறிப்பதால் அவை வெட்டும் புள்ளியாகிய B' ஆகும்.

$$\therefore \quad B' = aV + hH$$

$A'V$, BB' வெட்டும் புள்ளி K. $A'V$,-யின் சேர்க்கையாகவோ, B,B'-ன் சேர்க்கையாகவோ எழுதலாம்,

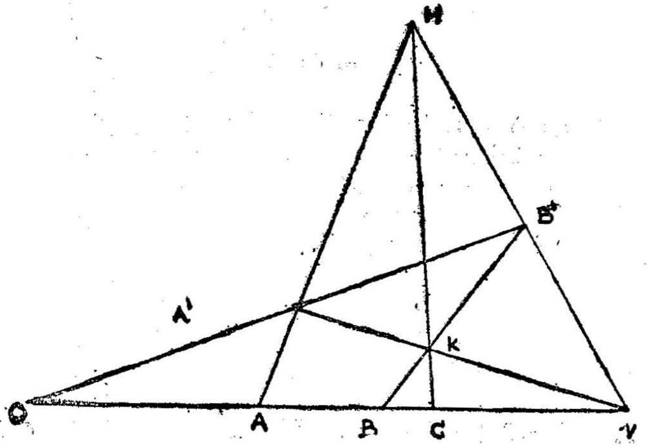
$$\therefore \quad K = 0 + (a + b)\, V + hH$$

$$[B' = aV+hH: \quad B=0+bV \quad \therefore\ 0+(a+b)\,V+hH=K]$$

$\therefore\ K-hH=0+(a+b)V$ $\therefore$ இவை தரும் புள்ளி KH, OV இவை வெட்டும் புள்ளி C ஆகும். $C=0+(a+b)V$ என வருகிறது.

$\therefore\ A, B, C$ எனும் புள்ளிகள், a,b, $(a+b)$ எனும் எண்களுடன் இணைந்து வருவதைக் காண்கிறோம். a, b என்ற இரு எண்களுக்கான இரு புள்ளிகள் OV-யில் இருப்பது போன்று $(a + b)$க்கான ஒரே ஒரு புள்ளி C-ஐக் காண்கிறோம். $c=a+b$ என வருகிறது.

இதே போல $(c - b) = a$ என c-யும் b-யும் தரப்பட்டால் a-ஐக் காணலாம். மேற்கூறிய வரைதலில் C, B, எனும் புள்ளி

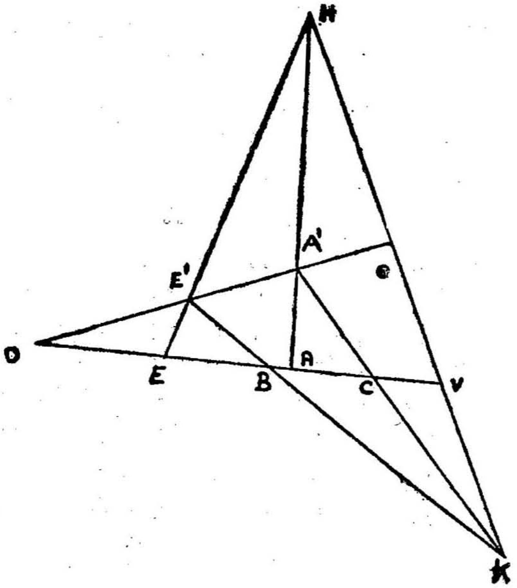


படம். 1 (*a*)

தரப்பட A-ஐக் காணும் வழிதான் 'கழித்தலுக்' கேற்ற வரைதல் ஆகும்.

3·5. பெருக்கல்

A, B எனும் புள்ளிகள் $A = 0 + aV$ எனவும். $B = 0 + bV$ எனவும் ஆகுக. E என்பது $E = 0 + V$ எனவாகுக. [E அலகுப் புள்ளி].



படம். 2

OV எனும் கோட்டிற்கு வெளியே H எனும் புள்ளியைக் கொள்க. O வழியுள்ள இன்னொரு கோட்டை $HE, HA,$ எனும் கோடுகள் E', A' எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். HV எனும் கோடும் $E'B$ எனும் கோடும் K எனும் புள்ளியில் வெட்டட்டும். $A'K$ எனும் கோடும் OV–யை C-ல் வெட்டட்டும். C எனும் புள்ளி A, B எனும் புள்ளிகளின் பெருக்கற்பலன் எனக் கூறப்படும்.

ஏனெனில்: OVH எனும் புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தை ஆதார முக்கோணமாகக் கொள்வோம்.

$\therefore\ A' = 0 + aV + hH$. E' எனும் புள்ளி OA'-லும் HE-லும் உள்ளதால் $E' = aO + aV + hH$ ஆகும்.

$[E=a(O+V)$ எனலாம். ஆகவே $E'=aO+aV+hH]$
HV; $E'B$ இவை வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி K ஆதலால் $E'B$ இவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகவோ அல்லது HV-ன் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகவோ கூறலாம்.

$$K=(aO+aV+hH)-a(O+bO)$$
$$=(a-ab)\,V+hH.$$

$A'K$, OV எனும் கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி C ஆதலால்

$$C=(O+aV+hH)-\{(a-b)V+hH\}$$
$$=O+abV$$

இவ்வாறு C-யின் கூறு 1, ab என வருவதைக் காண்கிறோம்.

வரைதல் முறையைக் கடைசியிலிருந்து முதல்வரை திருப்பி எழுத A, C எனும் புள்ளிகளிலிருந்து $\frac{C}{A}$ எனும் ஈவு வருவதைக் காணலாம்.

இவ்வாறு இயற்கணிதக் கிரியைகளுக்கு ஒத்த அமைவு வரைதல் திட்டமாக வருவதை ஓரளவு கூறினோம். இந்த வரைதல் முறைகளை இன்னும் ஆழமாக ஆராய வரைகணித அடிப்படையைக் கூறும் 'Principles of Geometry Vol. 1—H. F. Baker' அல்லது Projective Geometry—Veblen and Young எனும் நூல்களைப் படிக்க வேண்டும்.

இந்த அடிப்படையின் மேல் புள்ளிகளை எண்களுடன் இணைத்து எண்களுக்குரிய கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் முதலிய கிரியைகளைச் செய்வதால் வரும் எண்கள் புள்ளிகளைக் குறிக்கும் என அறிந்து, வரைகணித உண்மைகளை மேலும் காண்போம்.

3·6. தேசார்கின் தேற்றம் (Desargues' Theorem)

அமைவுத் தேற்றங்களுக்கு ஒரு விளக்கமாக அமையும் தேசார்கின் இரு முக்கோணத் தேற்றத்தைக் கூறுவோம்.

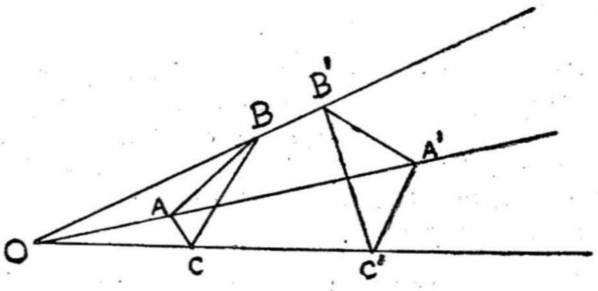
தேற்றம் :

ABC, $A'B'C'$ என்பவை வெவ்வேறு தளங்களிலோ அல்லது ஒரே தளத்திலோ அமையும் முக்கோணங்களாகி, AA', BB', CC', என்பவை ஒரு புள்ளிமேல் செல்லும் கோடுகளானல், (BC, $B'C'$, (CA, $C'A'$) (AB, $A'B'$) எனும் ஒத்த பக்கங்கள் ஒருகோடமைப் புள்ளிகளில் சந்திக்கும்.

நிரூபணம் :

(i) வெவ்வேறு தளங்களிலானல் : *ABC, A′B′C′* எனும் முக்கோணங்கள் அமையும் தளங்கள் π, π′ ஆகுக. *BB′, CC′* *O* எனும் புள்ளியில் சந்திப்பதால் *B B′, C, C′* ஒரே தளப் புள்ளிகளாகும். ∴ *BC, B′C′* ஒரு புள்ளி *L*-ல் வெட்டிக் கொள்ளும். *BC*, π-ல் அமைவதால் *L*-ம் அதே தளத்தில் அமைய வேண்டும். *B′C′*, π′-ல் அமைவதால் *L*-ம் π′-ல் அமைய வேண்டும். ∴ *L*-எனும் புள்ளி π, π′ வெட்டிக் கொள்ளும் பொதுக் கோட்டில் அமைய வேண்டும். இவ்வாறே (*CA, C′A′*), (*AB, A′B′*) வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகள் *M, N*-ம் அதே கோட்டில் அதாவது π, π′ எனும் தளங்களுக்குப் பொதுவான கோட்டில் அமைய வேண்டும்.

(ii) *ABC, A′ B′ C′* ஒரேதள முக்கோணங்களானல் :



படம். 3

ABC, A′ B′ C′ என்ற முக்கோணங்கள் π எனும் தளத்தில், *AA′* *BB′, CC′, O*-வில் சந்திக்கின்றன. π எனும் தளத்தில் அமையா *OPP′* எனும் கோட்டைக் கொள்க. *PP′ AA′* எனும் கோடுகள் *O*-வில் சந்திப்பதால் *PP′, AA′* ஒருதளப்புள்ளிகளாகும். ∴ *PA* *P′A′* எனும் கோடுகள் *A″* எனும் புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. இதே போல *PB, P′B′* எனும் கோடுகள் *B″*-லும் *PC, P′C′* எனும் கோடுகள் *C″*-லும் சந்திக்கின்றன. *B, B″, C, C″* சமதள புள்ளிகளாகும். ∴ *BC, B″C″* ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும். ஆனல் *BC. B′C′, B″C″* என்பவை *PBC, P′B′C′*, π எனும் மூன்று தளங்கள் இரண்டிரண்டாக வெட்டுங்கோடுகள். இவை மூன்று தளங்களும் சந்திக்கும் புள்ளி *L*-ல் அமையும். இதே போல *CA, C′A′, C″A″, M* எனும் புள்ளியிலும், *AB, A′B′, A″B″* எனும் கோடுகள் *N* எனும் புள்ளியிலும் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

ஆனால் ABC, $A''B''C''$ எனும் முக்கோணங்கள் வெவ்வேறு தளங்களில் அமைந்து AA''; BB'', CC'' எனும் ஒத்த முனைகளைச் சேர்க்கும் கோடுகள் P வழிச் செல்வதால், முன் சொன்னபடி ஒத்த பக்கங்கள் (BC, $B''C''$), (CA, $C''A''$), (AB, $A''B''$) வெட்டும் புள்ளிகள் L, M, N ஒரு கோடமைவன. ஆகவே தளத்தில் அமைந்துள்ள முக்கோணங்கள் ABC, $A'B'C'$-இன் ஒத்த பக்கங்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் (L, M, N) ஒரு கோடமைவன என வருகிறது.

குறிப்பு: ஒரே தள முக்கோணங்களுக்கு தேசார்குத் தேற்றத்தை நிறுவ, தளத்திற்கு அப்பால், வெளியில் உள்ள புள்ளி, கோடு இவற்றின் துணை தேவையாகிறது என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. தளத்தை மட்டும் கொண்டால், அமைவுத் தேற்றங்களின் அடிப்படையில் தேசார்குத் தேற்றத்தை நிறுவ முடியாது. அப்போது அதை நிறுவாமல் ஒரு எடுகோளாகக் (Axiom) கொள்ள வேண்டிவரும்.

3·7. குறியீட்டின் வழி தேசார்குத் தேற்ற நிரூபணம்

AA'; BB'; CC' என்பவை O வழிச் செல்வதால் O, மூன்று கோடுகளிலும் அமைகிறது.

$\therefore\quad O=xA+x'A' \quad O=yB+y'B' \quad O=zC+z'C'$

$\therefore\quad yB+y'B'=zC+z'C'$

$yB-zC=z'C'-y'B'$

இந்த இரு சம கோவைகள் தரும் புள்ளி ஒன்றே; BC, $B'C'$ இரண்டிலும் அமையும் L எனும் புள்ளியாகும்.

$\therefore\quad L=yB-zC$

இதே போல, (CA, $C'A'$), (AB, $A'B'$) எனும் ஒத்த பக்கங்கள், M, N எனும் புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொண்டால்

$M=zC-xA$

$N=xA-yB$

$\therefore\quad L+M+N=0$

$\therefore$ L, M, N ஒரு கோடமைவன ஆகும்.

குறிப்பு: முக்கோணங்கள் ஒரே தளத்திலாயினும் வெவ்வேறு தளத்திலாயினும் மேற்கூறிய நிரூபணம் பொருந்தும். ஆகவே குறியீடுகளில் நாம் புகுத்தும் பொருள், அமைவுத் தேற்றங்களில் உள்ளதை விடப் பரந்து (extensive) இருக்கிறது எனத் தெரிகிறது. இதே போல பாப்பஸ் தேற்றத்தையும்

குறியீடுகளினுல் நிறுவலாம். ஆனல் அமைவுத் தேற்றங்களி லிருந்து அதை நிறுவ முடியாது.

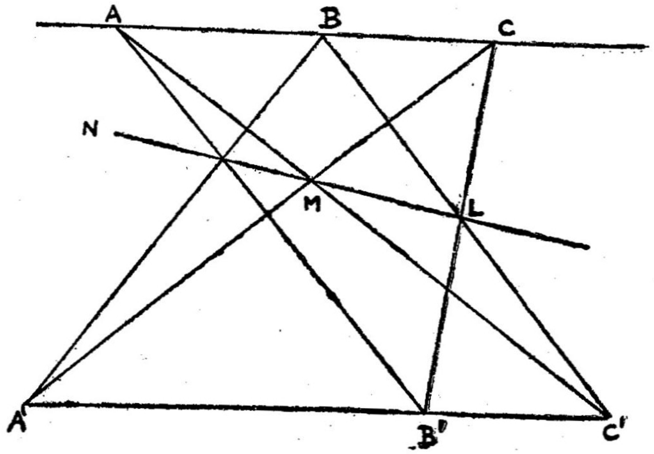
3·8. பாப்பஸ் தேற்றம் (Pappus' Theorem)

l எனும் கோட்டில் A, B, C என்பவை மூன்று வெவ்வேறு புள்ளிகள், l' எனும் கோட்டில் A', B', C' என்பவை மூன்று வெவ்வேறு புள்ளிகள். (இரண்டு கோடுகள் ஒரேதளத்தில் உள்ளன) என்ருல் $(AB', A'B)$, $(BC', B'C)$, $(CA', C'A)$ எனும் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன ஆகும்.

குறிப்பு : இத்தேற்றத்திற்கு வீழல்முறை வரை கணிதத்தில் தனிப்பட்ட முக்கியத்துவமுண்டு. அமைவுத்தேற்றங்களை மட்டும் உபயோகித்து இத்தேற்றத்தை நிரூபிக்க முடியாது. ஆகையால் இத்தேற்றத்தைச் சிலர் அமைவுத்தேற்றங்களில் ஒன்ருகக் கருதுகிருர்கள்,

$(BC', B'C)$ எனும் கோடுகள் L எனும் புள்ளியிலும்,
$(CA', C'A)$ எனும் கோடுகள் M எனும் புள்ளியிலும்,
$(AB', A'B)$ எனும் கோடுகள் N எனும் புள்ளியிலும்
வெட்டட்டும்.

L, M, N ஒரு கோடமைவன என நிரூபிக்க.



படம். 4

குறியீட்டு விளக்கத்தின் மூலம் இதை நிரூபிப்போம்.

$AB'C$ என்பதை ஆதார முக்கோணமாகக் கொள்வோம். படத்தில் உள்ள புள்ளிகளை A, B', C எனும் புள்ளிகளின் தொடரில் தருவோம்.

$M = xA + yB' + zC.$

AC-யில் B அமைவதால்

$B = pxA + zC$ எனலாம்.

A' எனும் புள்ளி MC-யில் இருப்பதால்

$A' = xA + yB' + qzC$ எனலாம்.

C' எனும் புள்ளி AM-லும் $A'B'$-யிலும் இருப்பதால்

$C' = xA + qyB'$ qzC எனலாம்.

$BC', B'C$ என்பவை வெட்டும் புள்ளி L ஆதலால் $B, C' : , C\ B$ எனபவற்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகக் கூற

$$L = p(xA + qyB' + qzC) - (pxA + zC)$$
$$= pqyB' + (pq-1)zC$$

இதேபோல N எனும் புள்ளி AB' ; $A'B$ யில் இருப்பதால்

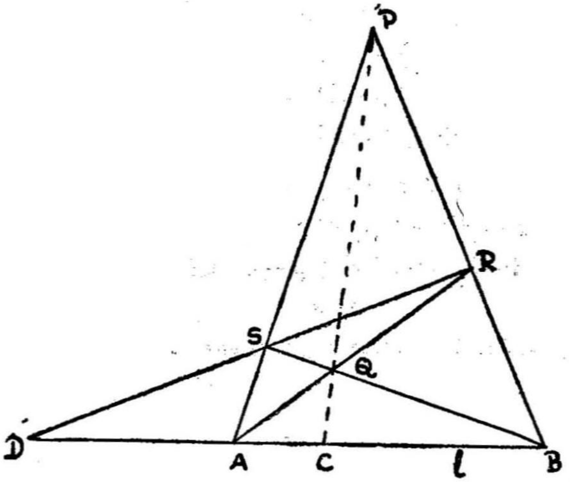
$$N = (1-qp)\ xA + yB'$$
$$L - N + (1-pq)\ M = (qp-pq)\ xA$$
$$= 0$$

$\therefore$ L, M, N என்பவை ஒரு கோடமைவன.

4. இசைப் பிரிவு

(Harmonic separation).

4·1. *A, B, C* என்பவை *l* எனும் கோட்டில் மூன்று புள்ளி



படம். 5

களாகுக. *l* வழி ஏதேனும் ஒரு தளத்தைக் கொள்க. இந்தத் தளத்தில் *AQR, BRP, CQP* எனும் கோடுகளை *A, B, C* வழி வரைக. அதனால் வரும் முக்கோணம் *PQR* ஆகுக. *AP, BQ* எனும் கோடுகள் *S*-ல் சந்திக்கட்டும். *RS* எனும் கோடு *AB* எனும் கோட்டை *D*-யில் சந்திக்கட்டும். அப்போது *D* என்பது *AB*ஐச் சார்ந்த, *C*-யின் இசையிணைப் புள்ளி எனப்படும்,

l வழி எந்தத் தளமாயினும் அல்லது *A, B, C* வழி உள்ள கோடுகள் யாதாயினும் *D* எனும் புள்ளியின் நிலை அதுவே என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

நிரூபணம்

A, B, R எனும் புள்ளிகளை ஆதாரப் புள்ளிகளாகக் கொள்க. C எனும் புள்ளி AB-யில் இருப்பதால்

$$C = xA + yB$$

Q எனும் புள்ளி AR-ல் இருப்பதால்

$Q = xA + zR$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \quad C - Q = yB - zR$$

இவை தரும் புள்ளி, CQ விலும் BR லும் உள்ள P ஆகும்.

$$\therefore \quad P = yB - zR.$$

BQ விலும் AP யிலும் உள்ள S எனும் புள்ளியை B, Q எனும் புள்ளிகளின் குறியீடுகளின் ஒரு படிச் சேர்க்கையாகக் கூற முடியும், அல்லது A, P எனும் புள்ளிகளின் ஒரு படிச் சேர்க்கையாகக் கூற முடியும்.

$\therefore \quad S = xA - (yB - zR)$ எனலாம்.

$$\therefore \quad S - zR = xA - yB$$

$\therefore \quad RS$-லும், AB-யிலும் D உள்ளதால்

$$D = XA - yB$$

$\therefore$ A, B, C இவை தரப்பட்டால் D-யைத் தரும் குறியீடு மற்றப் புள்ளிகளைச் சார்ந்ததல்ல. $\therefore$ $A\ B\ C$ வழி எந்தத் தளமாயினும் A, B, C வழி எக் கோடுகளாயினும் D எனும் புள்ளி ஒன்றேயாகும்.

$C = xA + yB$ **என்றால்** AB **ஐச் சார்ந்த அதன் இசையிணைப் புள்ளி** $D = xA - yB$ **ஆகும்.**

குறிப்பு 1. C, D எனும் புள்ளிகள், AB யின் இசைப்பிரிவுப் புள்ளிகள் எனப்படும்.

குறிப்பு 2. y இன் குறியை மாற்ற, $C = xA - yB$ எனவும் $D = xA + yB$ எனவும் வருவதால் AB-ஐச் சார்ந்த D-யின் இசையிணைப்புள்ளி C ஆகிறது.

குறிப்பு 3. $xA - yB$ என்பதுவும் $yB - xA$ என்பதுவும் ஒன்றே யாதலால் 'AB-ஐச் சார்ந்த' என்று கூறினும் 'BA ஐச் சார்ந்த' என்று கூறினும் ஒன்றே.

குறிப்பு 4: $2xA = C + D$

$$2yB = C - D$$

ஆனல் $2xA$ எனும் புள்ளியும் A எனும் புள்ளியும் ஒன்றே ; $2y\cdot B$ எனும் புள்ளியும் B எனும் புள்ளியும் ஒன்றே. $\therefore$ A, B என்பவை C, D-யின் இசைப் பிரிவுப் புள்ளிகள்.

குறிப்பு 5. இரு சோடிப் புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் இவ்வாறு அமையவரும் புள்ளிவரிசை இசைப்புள்ளிவரிசை(Harmonic Range) எனப்படும்.

எ.கா. 1 : ABC என்ற முக்கோணத் தளத்தில் O ஒருபுள்ளி. OA, OB, OC எனும் கோடுகள் BC, CA, AB ஐ முறையே X, Y, Z எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. X', Y', Z' என்பவை X, Y, Z-ன் BC, CA, AB ஐச் சார்ந்த இசையிணைப் புள்ளிகள் என்றல் X', Y', Z' ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளெனக் காட்டுக.

தீர்வு : ABC-ஐ ஆதார முக்கோணமாகவும் O-வை அலகுப் புள்ளியாகவும் கொள்க.

$\therefore$ $O = A + B + C$

$\therefore$ $O - A = B + C$

$\therefore$ OA, BC இவை வெட்டும் புள்ளி $X = B + C$

$\therefore$ X-ன் BC ஐச் சார்ந்த இசையிணை $X' = B - C$.

இதேபோல $Y' = C - A\ ;\ Z' = A - B$

$\therefore$ $X' + Y' + Z = 0$

$\therefore$ X', Y', Z' என்பவை ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளாகும்.

[$X = OA + B + C$ ஆனதால் X-ன் கூறுகள் $(0, 1, 1)$ X' ன் கூறுகள். $(0, 1, -1)$; இதே போல மற்றவையும்]

எ.கா. 2 : $A + yB : A + y'B$ எனும் இரண்டு புள்ளிகள், $A + zB,\ A + z'B$ எனும் புள்ளிகளின் இசைப்பிரிவுப் புள்ளிகளாகும் என்றல் $(y + y')(z + z') = 2(yy' + zz')$ என நிறுவுக.

$(A+yB)+p(A+y'B) = (1+p)(A+zB)$ என எழுதலாம். $A+z'B$ எனும் புள்ளி $(A+zB)$-யின் இசையிணைப் புள்ளியாதலால் $(A+y'B) - p(A+y'B) = (1-p)\ (A+z'B)$ என எழுதலாம். B-யின் குணகங்களைச் சமன்படுத்த

$$y+py' = (1+p)\,z$$

$$y-py' = (1-p)\,z'$$

$$\therefore \quad p\,(y'-z) = z-y$$

$$p\,(z'-y') = z'-p$$

p-ஐ நீக்கினல்; $(y'-z)\ (z'-y) = (z-y)\ (z'-y')$

$$y'z'-yy'-zz'+zy = zz'-zy'-yz'+yy'$$

$$(y+z)\ (y'+z') = (yy'+zz')$$

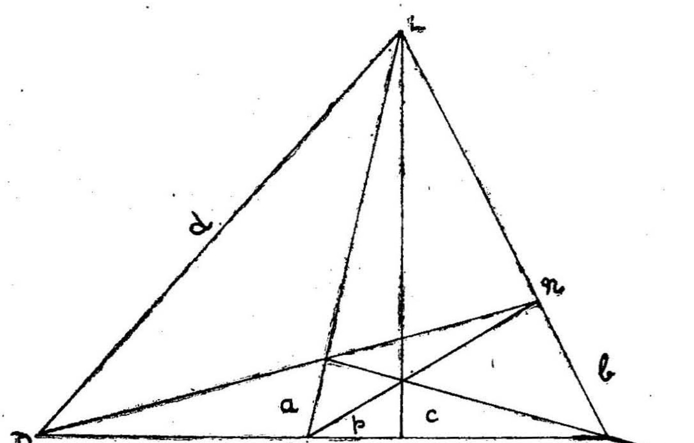
$(1, p)$ $(1, y')$ எனும் புள்ளிகள் AB-யில் இருக்க அவற்றின் இசைப் பிரிவுப் புள்ளிகள் $(1, z)$, $(1, z')$ ஆனல் $(y+z)\ (y'+z') = 2(yy'+zz')$ ஆகும். இதன் மறுதலையும் உண்மையே.

4·2, இசைப் பிரிவுக் கோடுகள்

புள்ளி-கோடு தொடர்புக் கேற்ற கோடு-புள்ளித் தொடர்பும் உள்ளது என இரு பான்மை நெறித் தத்துவத்தால் அறிவோம். இசைப் புள்ளி வரிசைக் கேற்ற இசைக் கோட்டுக் கற்றையும் (Harmonic Pencil) உள்ளது. இது எவ்வாறு அமைகிறது என் பதைக் கீழே கூறுவோம்.

4·3, இசைக் கோட்டுக் கற்றை (Harmonic pencil)

a, b, c எனும் மூன்று கோடுகள் L வழிச் செல்பவை; (ஒரே



படம். 6

தளத்தில் அமைபவை). aqr, brp, cpq எனும்படி மும்மூன்று கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழி இருக்கும்படிக் கொள்க. இதனல் வரும் முக்கோணம் pqr ஆகுக. ap, bq எனும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு s ஆகுக. L-ஐயும், rs எனும் புள்ளியையும் ab எனும் புள்ளியாகிய சேர்க்கும் கோடு d ஆகுக. 'd' எனும் கோடு, a, b எனும் கோடுகளைச் சார்ந்த C-ன் இசை இணைக்கோடு எனப்படும்.

d-ன் தனித் தன்மையை நிலைநாட்ட புள்ளி வரிசைக்குச் சொன்ன முறையையே பின்பற்றலாம்.

a, b, r எனும் கோடுகளையுடைய முக்கோணத்தை ஆதார முக்கோணமாகக் கொள்க. $C = \lambda o + \mu b$ எனலாம். a, b, c என்பவை கோடுகளின் குறியீடுகள்: λ, μ எண் குணகங்கள், q எனும் கோடு a, r உடன் இருப்பதால்

$$q = \lambda a + \gamma r \text{ எனலாம்.}$$

$$\therefore \quad c - q = \mu b - \gamma r$$

c, q; b, r தரும் கோடு p ஆதலால் $p = \mu b - rr$.

bq வழியும் ap வழியும் உள்ள s எனும் கோட்டை, a, p எனும் கோடுகளின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகக் கூற

$$s = \lambda a - (\mu b - \gamma r)$$

$$\therefore \quad s - rr = \lambda a - \mu b$$

$\widehat{rs}$, வழியும் $\widehat{ab}$ வழியும் செல்லும் கோடு d

$$\therefore \quad d = \lambda a - \mu b.$$

ஆகவே, a, b, c தரப்பட்டால் மற்றக் கோடுகள் ஏதாயினும் d ஒன்றே.

$\therefore \quad c = \lambda a + \mu b$ என்றால் a, b-ஐச் சார்ந்த அதன் இசையிணைக் கோடு $d = \lambda a - \mu b$ ஆகும்.

$L\,(ab\,;\,cd)$ என்பது இசைக் கோட்டுக் கற்றையாகும்.

குறிப்பு: 1. c, d எனும் கோடுகள் a, b-யின் இசைப் பிரிவுக் கோடுகள் எனப்படும்.

குறிப்பு: 2. μ-ன் குறியை மாற்ற $C = \lambda a - \mu b$ எனவும், $d = \lambda a - \mu b$ எனவும், ஆவதால் d-இன் a, b ஐச் சார்ந்த இசையிணைக் கோடு C ஆகும்.

குறிப்பு: 3. $\lambda a - \mu b$ என்பதுவும் $\mu b - \lambda b$ என்பதுவும் ஒன்றே யாதலால் 'AB-ஐச் சார்ந்த' எனினும் 'BA-ஐச் சார்ந்த' எனினும் ஒன்றே.

குறிப்பு: 4. $2\lambda a = c + d$

$$2\mu b = c - d$$

ஆனால் $2\lambda a$ என்பதுவும் a என்பதுவும் ஒரே கோட்டின் குறியீடாகும். அது போன்றே b யின் குறியீடும். $\therefore$ (a, b) எனும்

கோடுகள் c, d எனும் கோடுகளின் இசைப்பிரிவுக் கோடுகளாகும்.

குறிப்பு : 5. இரண்டு சோடிக்கோடுகள், இவ்வாறு அமைய வரும் கோட்டுக்கற்றை, இசைக் கோட்டுக் கற்றை எனப்படும். இவ்வாறு இசைக்கோட்டுக் கற்றையும், இசைப் புள்ளிவரிசையும் ஒன்றுக்கொன்று இருபான்மை உருப்படிகள் (*dual elements*) ஆகும்.

குறிப்பு : 6 படத்தில் s எனும் கோடு a, b, c, d என்ற கோடுகளை A,B,C,D எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். படத்தைப் பார்த்தால் D-யின் (AB-ஐச் சார்ந்த) இசையிணைப்புள்ளி C என்பது தெரியவரும். ஏனெனில் வரைதல் முறை அதற்கேற்ப அமைந்துள்ளதைக் காணலாம்.

p, q, r, s எனும் கோடுகளுக்குப் பதிலாக p', q', r', s' எனும் கோடுகளாகக் கொண்டால் வரும் $A' B'$; $C' D'$ எனும் புள்ளி வரிசையும் இசைப் புள்ளி வரிசையாக வரும். ஏனெனில் 'd' எனும் c-யின் இசையிணைக்கோடு, இந்தக் கோடுகளைச் சார்ந்ததல்ல என நிறுவியுள்ளோம். ஆகவே கீழ்வரும் தேற்றங்கள் புலனாகின்றன.

(i) இசைக் கோட்டுக் கற்றையின் கோடுகள் ஒரு கோட்டை வெட்ட வரும் புள்ளிகள் இசைப்புள்ளிவரிசையாகும்.

(ii) இசைப்புள்ளிவரிசையின் புள்ளிகளை வேறொரு புள்ளியுடன் சேர்க்கவரும் கோட்டுக்கற்றை இசைக் கோட்டுக் கற்றையாகும்.

(iii) ஒரு கோட்டுக்கற்றை இன்னொரு கோட்டின் மேல் இசைப்புள்ளி வரிசையை ஏற்படுத்தினால், மற்றக் கோடுகள் மீதும் இசைப் புள்ளி வரிசையை ஏற்படுத்தும்.

(iv) ஒரு புள்ளிவரிசை, இன்னொரு புள்ளியில் இசைக் கோட்டுக் கற்றையை ஏற்படுத்தினால் மற்றப் புள்ளிகளிலும் இசைக் கோட்டுக் கற்றையை ஏற்படுத்தும்.

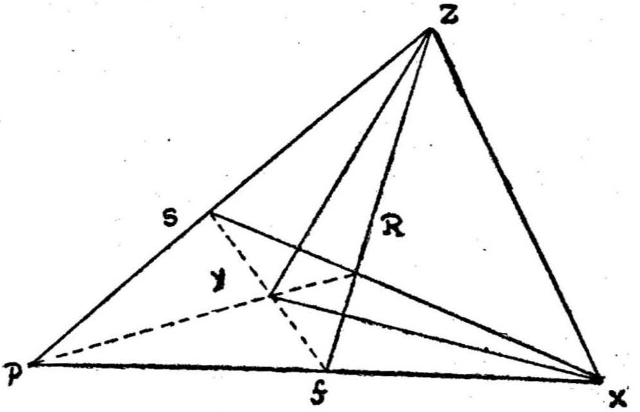
4·4. *முழு நாற்கோணம்.* (Complete quadrangle)

எந்த மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோட்டிலமையாத, நான்கு புள்ளித் தொகுதி, முழு நாற்கோணம் எனப்படும். இரண்டிரண்டாகப் புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்ள அவை தரும் ஆறு ($4C_2$) கோடுகள் அதன் பக்கங்கள் எனப்படும். நான்கு புள்ளிகளும் வரும்படிச் சோடியாக எடுத்துக் கொள்ளும்

பக்கங்கள், சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் எனப்படும். மூன்று சோடிப் பக்கங்கள் சந்திக்கும் மூன்றுபுள்ளிகள் நாற்கோணத்தின் மூலே முக்கோணம் (*diagonal triangle*) எனப்படும். அதன் முனை கள் மூலைப் புள்ளிகள் எனப்படும்.

முழுநாற்கரம்: மேற் கூறியதன் இரு பான்மை உருப்படி முழுநாற்கரம் (*Complete quadrilateral*) மேற் கூறியதன் ஆகும்.

எந்த மூன்று கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் அமையாது உள்ள நான்கு கோடுகளின் தொகுதி முழு நாற்கரம் எனப்படும். இரண்டிரண்டாகக் கோடுகளைக் கொள்ள அவை தரும் ஆறு ($4C_2$) புள்ளிகள் அதன் முனைகள் எனப்படும். நான்கு கோடுகள் வரும்படி சோடியாக எடுத்துக் கொள்ளப் படும் முனைகள், சோடி எதிர்முனைகள் எனப்படும். மூன்று சோடி எதிர் முனை கள் தரும் மூன்று கோடுகள், நாற்கரத்தின் மூலே முக்கோணம் எனப்படும். மூன்று பக்கங்கள் நாற்கரத்தின் மூலைக் கோடு கள் எனப்படும்.



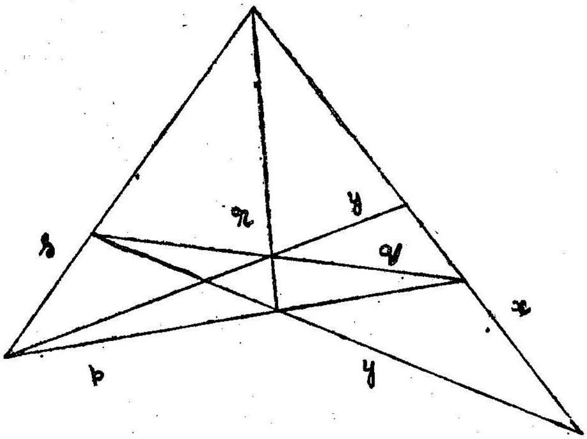
படம். 7 (முழு நாற்கோணம்)

P, Q, R, S என்பவை நான்கு புள்ளிகள்,

PQ, RS
PR, QS } மூன்று ஜோடி எதிர்ப் பக்கங்கள்
PS, QR

PQ, RS தரும் புள்ளி *X*
PR, QS தரும் புள்ளி *Y*
PS, QR தரும் புள்ளி *Z*

X Y Z மூலே முக்கோணம்.



படம். 8
(முழு நாற்கரம்)

p, q, r, s என்பவை நான்கு கோடுகள்

$\overline{pq}$, $\overline{rs}$ }
$\overline{pr}$, $\overline{qs}$ } மூன்று சோடி எதிர் முனைகள்
$\overline{ps}$, $\overline{qr}$ }

$\overline{pq} - \overline{rs}$ தரும் கோடு *x*
$\overline{pr} - \overline{qs}$ தரும் கோடு *y*
$\overline{ps} - \overline{qr}$ தரும் கோடு *z*

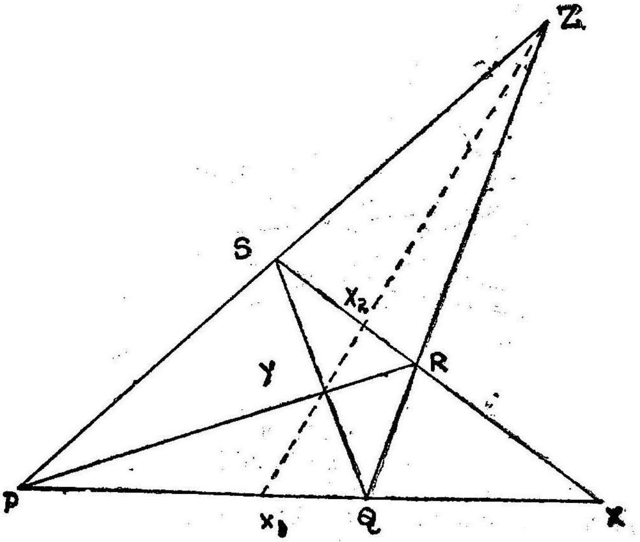
x y z என்பது மூலை முக்கோணம்.

படங்கள் ஏறக்குறைய ஒன்றுபோல் இருப்பினும் மூலை முக்கோணங்கள் வெவ்வேருக இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

4·5. முழு நாற்கோணத்தின் இசைப்பண்பு: (Harmonic property of the complete quadrangle)

PQRS என்ற நாற்கோணத்தின் மூலை முக்கோணம் *XYZ* என்ருல், மூலை முக்கோணத்தின் இருபக்கங்களும் அவற்றுடன் அதே முனையில் சந்திக்கும் நாற்கோணத்தின் பக்கங்களும் இசைப் பிரிவுக் கோடுகளாகும். இதுவே முழு நாற்கோணத்தின் இசைப் பண்பு எனப்படும்.

PQRS என்பது நாற்கோணம். *PQ, RS* வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி *X*, மூலை முக்கோணத்தின் ஒருமுனை. *PS, QR* சந்திப்பது



படம். 9

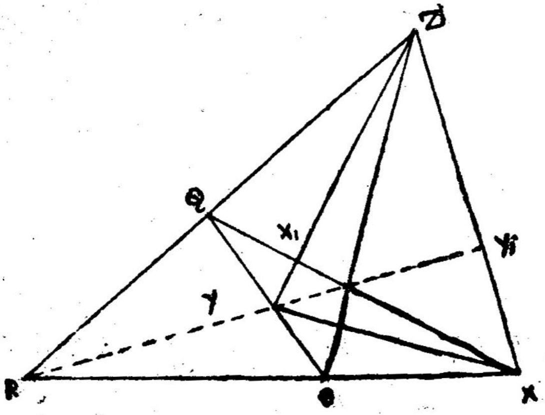
Z எனும் முனை. PQ வைச் சார்ந்த X இன் இசை இணைப் புள்ளியைக் காண்பதற்குச் சொன்ன வரைதல் அமைப்பைப் படத்தில் காண்கிறோம். அதன்படி, PQ-வில் உள்ள X_1 (அதாவது ZY-யும் PQ-வும் வெட்டும் புள்ளி) X-ன் இசை இணைப் புள்ளி. ஆகவே ZP, ZQ-ன் இசைப்பிரிவுக் கோடுகள் ZY, ZX ஆகும். இதுபோன்று மற்ற முனைகளில் XP, XS-ன் இசைப்பிரிவுக் கோடுகள் XY, XZ; YR, YQ வின் இசைப்பிரிவுக் கோடுகள் YX, YZ ஆகும். இவ்வாறு நாற்கோணத்தின் இசைப்பண்பு, ஒரு புள்ளியின் இசையிணை காணும் வரைதல் முறையிலிருந்து தெளிவாகிறது.

4·6. இதன் இருபரன்மைத் தேற்றம்

ஒரு முழு நாற்கரத்தின் மூலை முக்கோணத்தின் இரு முனைகளும், அவற்றுடன் ஒரு கோடமையும் நாற்கரத்தின் இரு முனைகளும் ஒன்றுக்கொன்று இசைப் பிரிவுப் புள்ளிகளாகும்

எ. கா. PQRS எனும் நாற்கோணத்தின் மூலை முக்கோணம் XYZ என்றால் $P=X+Y+Z$; $Q=-X+Y+Z$, $R=X-Y+Z$; $S=X+Y-Z$. எனக் கூற முடியும் எனக் காட்டுக.

XYZ முக்கோணத்தை ஆதார முக்கோணமாகவும் P-ஐ அலகுப் புள்ளியாகவும் கொள்க.



படம். 10

$\therefore$ $P = X+Y+Z$ அல்லது P-யின் கூறுகள் (1, 1, 1) ஆகும்.

XP எனும் கோடு YZ-ஐ X எனும் புள்ளியில் வெட்டட்டும்.

$X_1 = \lambda X+\mu\,(X+Y+Z)$ [XP-ல் இருப்பதால்]

$X_1 = \lambda' Z + \mu' Y$ [ZY-ல் இருப்பதால்]

இரண்டும் ஒரே புள்ளியைத் தருவதால் XYZ-ன் குணகங்களின் விகிதம் சமம்.

$$\therefore \frac{\lambda+\mu}{O} = \frac{\mu}{\mu'} = \frac{\mu}{\lambda'} \quad \therefore \begin{array}{l} \lambda'=\mu' \\ \lambda=-\mu \end{array}$$

$\therefore$ $X_1 = Y + Z$ எனவாம்.

P என்பது $X + (Y + Z)$

$\therefore$ XX_1 க்கு P இசையிணை $Q = X - (Y + Z)$

$\therefore$ $Q = X - Y - Z$ அல்லது $(- X + Y + Z)$. Q-வின் கூறு (−1, 1, 1).

இதே போல YP எனும் கோடு ZX–ஐ Y-ல் வெட்டினால்

$Y_1 = Z+X$ $\therefore$ $R=Y-(Z+X)$

$\therefore$ $R=X-Y+Z$ $\therefore$ R-ன் கூறு (1, −1, 1)

இதே போல $S=X+Y-Z$ S-ன் கூறு (1, 1, −1)

5. தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசைகள்
(Related Ranges)

5·1. விளக்கம்

l, l' என்பவை இரு கோடுகள். l-ன் மேல் O, V எனும் குறிப்பிட்ட புள்ளிகளையும் l'-ன் மேல் o', v' எனும் குறிப்பிட்ட புள்ளிகளையும் கொள்க. l-ன் மேல் புள்ளி $x = o + xv$ ஆகுக. l'-ன் மேல் புள்ளி $x' = o' + x'v'$ ஆகுக.

$pxx' + qx + rx' + s = 0$ எனும் சமன்பாட்டிற் கிணங்கிய தொடர்பு, $x\ x'$ இடையே நிலவினால்,

$$x = -\frac{(rx' + s)}{px' + q} \text{ எனவும் } x' = -\frac{(qx + s)}{px + r}$$

எனவும் $(ps - qr \neq 0)$ கூற முடியும்.

அதாவது x-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு x'-க்கு ஒரே மதிப்பு வரும். x'-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு x-க்கு ஒரே மதிப்பு வரும். இவ்வாறு x, x' இடை ($ps - qr \neq 0$ ஆக இருந்தால்) ஒன்றன் மதிப்புக்கேற்ற ஒரே மதிப்பு மற்றதற்கு வரும். இவ்வாறு ஒன்றுக்கு ஒன்றே (one-one correspondence) எனும் தொடர் புடையனவாய் x, x' எண்கள் உள்ளன. ஆகவே இவை தரும் புள்ளிகள் x, x' இத்தகைய ஒன்றற் கொன்றேயெனும் தொடர் புடையனவாய் முறையே l எனும் கோட்டிலும் l' எனும் கோட்டிலும் அமையும். இத்தகைய புள்ளிவரிசை தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசை அல்லது வீழல் தொடர்புடைப் புள்ளிவரிசை (Projectively related or simply related ranges) எனப்படும். இத் தகைய தொடர்பைக் குறியீட்டில் $(1 - 1)$ தொடர்பு என எழுது வோம்.

(i) l, l' எனும் கோடுகள் வெவ்வேருக இருக்கலாம் அல்லது (ii) இரண்டும் ஒன்ருேடொன்று பொருந்தி ஒரே கோடாகவும்

இருக்கலாம். முதற்கண், வெவ்வேறு கோடுகளில் அமையும் புள்ளி வரிசைகளைப்பற்றிப் படிப்போம்.

தொடர்பைத் தரும் சமன்பாடு

$pxx' + qx + rx' + s = 0$, ல் x, x' மாறிகளாகும். p, q, r, s மாறிலிகளாகும். x, x'-இன் மூன்று ஒத்தமதிப்புக்கள் தரப் பட்டால், தொடர்பை நிச்சயிக்க முடியும். x_1, x_1' x_2, x_2' x_3, x_3' என்பவை மூன்று ஒத்த மதிப்புக்களாகுக. அப்போது தொடர் பைத் தரும் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} xx' & x & x' & 1 \\ x_1x_1' & x & x_1' & 1 \\ x_2x_2' & x_2 & x_2' & 1 \\ x_3x_3' & x_3 & x_3' & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே மூன்று ஜோடி ஒத்த புள்ளிகள், $A, B, C : A' B' C'$ தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசையை நிச்சயிக்கின்றன.

3·2. குறுக்கு வீதம் (Cross-Ratio)

O, V எனும் புள்ளிகளின் மேல் அமையும் கோட்டில் A,B,C,D என்பன நான்கு புள்ளிகளாகுக. அப்போது $A = o + av$; $B = o + bv$; $C = o + cv$; $D = o + dv$ எனக் கூறலாம். (AB, CD) என்ற புள்ளி வரிசையின் குறுக்கு வீதம் $\dfrac{a-c}{a-d}\Big/\dfrac{b-c}{b-d}$ அல்லது $\dfrac{a-c}{a-d}\cdot\dfrac{b-d}{b-c}$ எனப்படும். இதை (AB, CD) எனக் கால் புள்ளியிட்டோ அல்லது $(ABCD)$ எனவோ குறிப்பது வழக்கம். நாம் முன்னர் கூறியபடி (AB, CD) என்றே குறிப்போம்.

குறிப்பு: 1, யூக்லித முறைப்படி இரு புள்ளிகளிடையே யுள்ள தூரத்தையும் பயன்படுத்தி $(AB, CD) = \dfrac{AC.BD}{AD.BC}$ என எழுதுவது வழக்கம். இங்கு, தூரம் எனும் கருத்து இல்லாம லேயே குறுக்குவீதம் வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது.

குறிப்பு 2: புள்ளிகளைப் பற்றியும் கூறுமல் a, b, c, d எனும் நான்கு துணை அலகெண்களின் (Parameters) குறுக்கு வீதம் என்று கூறி அதை $(a, b; cd) = \dfrac{a-c}{a-d}\Big/\dfrac{b-c}{b-d}$ எனவோ

அல்லது $\dfrac{(a-c)}{(a-d)} \cdot \dfrac{(b-d)}{(b-c)}$ எனவோ எழுதலாம். இதுவும் பல இடங்களில் பயனளிக்கத்தக்கதாக இருக்கும்.

5·3. நான்கு புள்ளிகளின் குறுக்கு வீதத்தின் தனித் தன்மை

A, B, C, D என்ற புள்ளிகளை O, V எனும் ஆதாரப் புள்ளிகளுடன் இணைத்துக் கூறி, குறுக்கு வீதத்தைக் கூறினோம், O', V' எனும் வேறு புள்ளிகளை அதேகோட்டில் ஆதாரப் புள்ளிகளாகக் கொண்டாலும் குறுக்கு வீதம் $A\ B\ C\ D$-ஐப் பொறுத்ததே ஒழிய, ஆதாரப் புள்ளிகளைப் பொறுத்ததல்ல.

இதன் நிரூபணம்

வழி 1. $O' = O + pV$

$V' = O + qV$ ஆகுக.

$$a_2A = O' + a'V' \ . \ b_2B = O' + b'V \ . \ c_2C = O' + c'V$$

$$d_2D = O' + d'V'$$

$$a_2A = (O+pV) + a'\ (O+qV) = (1+a')\ O + (p+a'p)\ V$$

இதே போன்று மற்றப் புள்ளிகள் B, C, D க்கும்.

$\therefore \quad a = \dfrac{p + a'q}{1 + a'}$; இன்ன பிற.

$\therefore \ a-c = \dfrac{(p-q)\ (a'-c')}{(1+a')\ (1+c')}$ இது போல் மற்றதற்கும்

பிரதியிட.

$\therefore \quad \dfrac{(a-c)\ (b-d)}{(a-b)\ (b-c)} = \dfrac{(a'-c')\ (b'-d')}{(a'-d')\ (b'-c')}$ எனக் காண்கிறோம்.

ஆகையால் ஆதாரப்புள்ளிகள் மாற, புள்ளிகளின் கூறுகள் மாறுகின்றன. ஆனால் குறுக்கு வீதம் மாறுவதில்லை.

வழி 2. $a = \dfrac{p + a'q}{1 + a'} \qquad c = \dfrac{p + c'q}{1 + e'}$

$$\therefore \quad a - c = \frac{p + pc' + a'q + a'qc' - p - pa' - c'q - c'qa'}{(1+a')\ (1+c')}$$

$$= \frac{(q-p)\ (a'-c')}{(1+a')\ (1+c')}$$

$$a - d = \frac{(q-p)\ (a'-d')}{(1+a')\ (1+d')}$$

$$\therefore \quad \frac{a-c}{a-d} = \frac{(a'-c')\,(1+d')}{(a'-d')\,(1+c')}, \text{ இதே போல}$$

$$\frac{b-c}{b-d} = \frac{(b'-c')\,(1+d')}{(b'-d')\,(1+c')}$$

$$\therefore \quad \frac{a-c}{a-d} \Big/ \frac{b-c}{b-d} = \frac{a'-c'}{a'-d'} \Big/ \frac{b'-c'}{b'-d'}$$

5·4. இசைப் புள்ளிவரிசையின் குறுக்கு வீதம்

ஆதாரப் புள்ளிகளை A, B யாகக் கொள்வோம். அதாவது O-வை A-யிலும் V-யை B-யிலும் கொள்வோம். $a=0$; $b=\infty$.

$$(AB\,;\,CD) = (o\,\infty\,;\,cd) = \frac{o-c}{o-d}\cdot\frac{\infty-d}{\infty-c} = \frac{c}{d}$$

$$(ab, cd) = (ba, dc) = (cd, ab) = (dc, ba) = R$$

$$(ba, cd) = (ab, dc) = (cd, ba) = (dc, ab) = \frac{1}{R}$$

$$(ae, bd) = (ca, db) = (bd, ac) = (db, ca) = 1-R$$

$$(ca, bd) = (ae, db) = (db, ca) = (db, ac) = \frac{1}{1-R}$$

$$(be, ad) = (cb, da) = (ad, bc) = (da, cb) = \frac{R-1}{R}$$

$$(cb, ad) = (bc, da) = (ad, cb) = (da, bc) = \frac{R}{R-1}$$

என இருபத்து நான்கு குறுக்கு வீதங்கள் நான்கு எண்களை வரிசை மாற்றம் செய்ய வருகின்றன.

5·5. சம குறுக்கு வீதங்கள்

சில குறிப்பிட்ட விதமாய்ப் புள்ளிகள் அமைந்தால், மேற் கூறிய மதிப்புகளும் வெவ்வேருய் இராமல் அவைகளிலும் சில சமமாக வரும்.

$R = \frac{1}{R}$ என்ருல் $R^2 = 1$. $R = 1$ அல்லது $R = -1$, $R = 1$ என்ருல், ஆறு குறுக்கு வீதங்கள் பின் வருமாறு: $R = 1$; $\frac{1}{R} = 1$; $1-R = 0$; $\frac{1}{1-R} = \infty$; $\frac{R-1}{R} = 0$; $\frac{R}{R-1} = \infty$.

$\therefore$ 1, 1 ; 0; V; ∞, ∞ ; என இரண்டிரண்டு சமமாக மூன்று வெவ்வேறு மதிப்புக்கள் வருகின்றன. இதற்கு $A = B$ அல்லது $bc + ad = ca + bd$ அதாவது $(a - c)(b - d) \equiv 0$. i.c.. $a = e$ அல்லது $b = d$ ஆகவேண்டும்.

$$\text{இதேபோல்} \ (CA, BD) = (ca, bd) = \frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha}$$

$$(AB, CD) = (ak, cd) = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta}$$

$$\therefore \ (BC, AD) . (CA, BD) . (AB, CD) = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma} . \frac{\beta - \gamma}{\beta - \gamma} . \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \beta}$$

$$= - 1.$$

இரண்டாவது வழி: $D = A + eB$

$D = A + dB$

எனக் கொள்க. அப்போது A, B, C, D இவற்றின் துணையலகெண்கள் (o, ∞, c, d) ஆகும். இவைகளைப் பயன்படுத்தி (BC, AD), (CA, BD), $(AB. CD)$ காண விடைவரும்.

5·6. ஐந்து புள்ளிகளின் குறுக்கு வீதப் பண்பு

P, Q, R, O, V என்பன ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளானால் $(PQ, OV). (QR, OV) = (PR. OV)$ எனவாகும்.

$$P = o + pv, \quad Q = o + qv, \quad R = o + rv$$

$$\text{என்றால்} \ (QR, OV) = (qr, o\infty) = \frac{q}{r}$$

$$\text{இதே போன்று} \ (PQ, OV) \quad = \frac{p}{r}$$

$$(PR, OV) \quad = \frac{p}{r}$$

$$\therefore \ (PQ, OV) . (QR, OV) = \frac{p}{q} . \frac{q}{r} = \frac{p}{r} = (PQ, OV)$$

கணக்கு

A, B, C என்பன ஒரு கோட்டில் அமையும் மூன்று குறிப்பிட்ட புள்ளிகள். $(AB, CX) = R$ எனும்படி குறுக்குவீதம் உள்ள நான்காவது புள்ளி X ஒன்றே ஒன்று உளது என நிறுவுக.

தீர்வு

ஆதாரப் புள்ளிகள் யாதாயினும் குறுக்குவிதம் மாறுதெனக் கண்டோம். ஆகவே A, B-ஐ ஆதாரப் புள்ளியாகக் கொள்க.

$$\therefore \quad C = A + cB$$
$$X = A + xB$$

A-யின் துணையலகெண் o
B-யின் துணையலகெண் ∞
C-யின் துணையலகெண் c
X-யின் துணையலகெண் x

$$\therefore \quad (AB, CX) = \frac{o - c}{o - x} \Big/ \frac{\infty - c}{\infty - x} = \frac{c}{x}$$

ஆனல் $(AB, CX) = R \qquad \therefore \frac{c}{x} = R$

$$\therefore \quad x = \frac{c}{R} \text{ எனக் காண்கிறோம்.}$$

$$\therefore \quad x = A + \frac{c}{R} B \text{ எனும் ஒரே புள்ளியாகும்.}$$

[$R = -1$ என்றால் $X = A - eB$ என C-யின் இசையிணைப் புள்ளியாக வருதல் காண்க.]

கணக்கு

A, B, C, D என்பவை ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளானல் $(BC, AD) . (CA, BD) . (AB, CD) = -1$ என நிறுவுக.

முதல் வழி : A, B, C, D என்பனவற்றின் துணையலகு எண்கள் a, b, c, d ஆகுக.

$$\therefore \quad (BC, AD) = (bc, ad) = \frac{b-a}{b-d} \cdot \frac{c-d}{c-a} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}$$

$$(\alpha = bc + ad, \quad \beta = ca + bd, \quad \gamma = ab + cd)$$

AB-யின் இசைப்பிரிவுப் புள்ளிகள் C, D ஆனல் $C = A + \lambda B$ என்றால் $D = -\lambda B$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{c}{d} = -1 \text{ எனக் காண்கிறோம்.}$$

$\therefore$ AB, CD இசைப்புள்ளி வரிசையானல்
$(AB; CD) = -1$ மறுதலையாக
$(AB; CD) = -1$ என்றால் இசைப்புள்ளி வரிசையாகும்.

5·7. நான்கு துணை அலகெண்களின் 6 குறுக்கு வீதங்கள்

a, b, c, d என்ற எண்களின் குறுக்கு வீதம் எண்கள் எந்த வரிசையில் எடுக்கப்படுகிறதோ அதைப் பொறுத்தது. 24 வித வரிசையாக *a, b, c, d*-ஐ அமைக்கலாம்.

$$(ab, cd) = \frac{(a-c)}{(a-d)} \cdot \frac{(b-d)}{(b-c)}$$
$$= \frac{(ab+cd) - (bc+ad)}{(ab+cd) - (ca+bd)}$$
$$= \frac{C-A}{C-B}$$

எனலாம். இங்கு $A = bc + aa$
$B = ea \mp cd$
$C = ab + cd$

ஆகவே *A, B, C*-ஐ 6 விதமாக வரிசை மாற்றம் செய்யலாம். ஆதலால், 6 வெவ்வேறு மதிப்புக்களே குறுக்கு விகிதத்திற்குள்ளது.

a, b, c, d என்ற எண்களில் இரண்டு எண்களை வரிசை மாற்றம் செய்து, மற்றிரண்டு எண்களையும் வரிசை மாற்றம் செய்தால் *A, B, C* மாருது.

$$\therefore \quad (ab, cd) = (ba, dc) = (cd, ab) = (dc, ba)$$

∴ 24 குறுக்கு வீதங்கள், நான்கு நான்காக ஆறு மதிப்புடைய குறுக்கு வீதங்கள் வரும்.

$$(ab, cd) = \frac{C-A}{C-B} = R \text{ ஆகுக.} \qquad (1)$$

$$\therefore \quad (ba, cd) = \frac{C-B}{C-A} = \frac{1}{R} \qquad (2)$$

$$(ac, bd) = \frac{B-A}{B-C} = 1 - \frac{C-A}{C-B} = 1 - R \qquad (3)$$

$$(ca, bd) = \frac{1}{1-R} \qquad (4)$$

$$(bc, ad) = \frac{A-B}{A-C} = 1 - \frac{C-B}{C-A} = 1 - \frac{1}{R} = \frac{R-1}{R} \qquad (5)$$

$$(cb, ad) = \frac{A-C}{A-B} = \frac{R}{R-1} \qquad (6)$$

என ஏதேனும் ஒரு வரிசைக்கு வரும் குறுக்கு வீதம் R என்றால், மற்ற மதிப்புக்கள் $\frac{1}{R}$. $1-R$, $\frac{1}{1-R}$, $\frac{R-1}{R}$, $\frac{R}{R-1}$ என வருகிறது. இரண்டு புள்ளிகளாவது ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்தும்

(ii) $R = -1$ என்றால்

$$R = \frac{1}{R} = -1 \; ; \quad 1 - R = 1 - \frac{1}{R} = 2 \; ;$$

$$\frac{1}{1-R} = \frac{R}{R-1} = \frac{1}{2}$$

என $-1, -1$; $2, 2$; $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; என வருகிறது. இது இசைக் குறுக்குவீதம் எனப்படும். இதை அடிக்கடி பார்ப்போம்.

நான்கு வெவ்வேறு எண்கள் $(ab \, ; \, cd)$யில்

$(ab, cd) = (ba, cd)$ என்றோ

$(ab, cd) = (ab, dc)$ என்றோ இருந்தால் அவைதரும் புள்ளிகள் (அல்லது கோடுகள்) இசைவரிசை (அல்லது இசைக்கற்றை) யாகும். ஏனெனில் $R = \frac{1}{R}$ ல் $R = 1$ ஆக முடியாது. (எண்கள் யாவும் வெவ்வேருவதால்).

(iii) $R = 1 - \frac{1}{R}$ என்றால் $R = R + 1 = 0$

$\therefore \quad R = -w$ அல்லது $-w^2$ ஆகும்.

$-w, -w^2$ என்பது -1ன் கற்பனை கனமூலங்கள்.

$$\therefore \quad R = 1 - \frac{1}{R} = \frac{1}{1-R} = -w$$

$$\frac{1}{R} = \frac{R}{R-1} = 1 - R = -w^2$$

இதைப்பற்றி நாம் மேற்கொண்டு கூறப்போவதில்லை.

5·8. கோட்டுக்கற்றையின் குறுக்குவீதம் (Cross ratio of a pencil of lines)

புள்ளி வரிசைக்கென குறுக்கு வீதம் உள்ளது போல், இருபான்மையாக, கோட்டுக்கற்றைக்கும் குறுக்கு வீதம் உளது.

L எனும் புள்ளி வழி $a, b, c, d,$ எனும் நான்கு கோடுகளைக் கொள்வோம். L வழியுள்ள $u, v,$ எனும் கோடுகளை ஆதாரக் கோடுகளாகக் கொள்ள $a = u + \alpha v$, $b = u + \beta v$, $c = u + r v$, $d = u + \delta v$, என எழுதலாம். $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன எண்குணகங்களாகும். நான்கு கோடுகளைச் சேர்ந்த துணை அலகெண்கள் எனப்படும். நான்கு கோடுகள் கொண்ட கோட்டுக் கற்றையின் குறுக்கு விதம் $\dfrac{\alpha - \gamma}{\alpha - \delta} \Big/ \dfrac{\beta - \gamma}{\beta - \delta}$ அல்லது $\dfrac{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}{(\alpha - \delta)(\beta - \delta)}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

5·9. குறிப்பு 1. நான்கு கோடுகளின் குறுக்கு விதம் u', v' எனும் கோடுகளை ஆதாரமாகக் கொண்டாலும் மாறாது, அதாவது குறுக்குவிதமதிப்பு ஆதாரக் கோடுகளைச் சார்ந்ததல்ல.

குறிப்பு 2. L வழியுள்ள a, b-யும் c, d-யும் இசைப்பிரிவுக் கோடுகளானால் $(ab ; cd) = -1$ ஆகும். மறுதலையாகக் குறுக்கு விதம் -1, ஆனால் இசைக்கோட்டுக் கற்றையாகும்.

5·10. தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசையில் குறுக்கு விதம் (Cross ratio of related ranges)

l எனும் கோட்டில் உள்ள A, B, C, D எனும் புள்ளிகளின் அதன் மேலுள்ள O, V எனும் ஆதாரப்புள்ளிகளைச் சார்ந்த துணை அலகுகள் a, b, c, d ஆகுக,

l' எனும் கோட்டில் உள்ள A', B', C', D' எனும் புள்ளிகளின், அதன் மேலுள்ள O' V' எனும் ஆதாரப் புள்ளிகளைச் சார்ந்த துணை அலகுகள் a', b', c', d' ஆகுக. இவ்விரண்டு புள்ளி வரிசைகளும் தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசைகளானால் ஒத்தபுள்ளிகளின் துணை அலகுகள் $pxx' + qx + rx + s = 0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு ஒத்ததாய் இருக்கும்.

$$\therefore \quad paa' + qa + ra' + s = 0$$

$$\therefore \quad a = -\frac{(ra' + s)}{(Pa' + q)};$$ இதே பால், b, c, d க்கும்.

அப்போது $\dfrac{(a - c)(b - d)}{(a - d)(b - c)}$ ல் பிரதியிட

$$\frac{(a - c)(b' - d)}{(a - d)(b' - c)} = \frac{(a' - c')(b' - d')}{(a' - d')(b' - c')}$$ என வரும்.

$\therefore \quad (AB, CD) = (A'B', C'D')$ எனக் காண்கிறோம்.

இதன் விரிவை அடுத்த பக்கத்தில் காண்க.

இரண்டு கோடுகளில் உள்ள புள்ளிகள் 'தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசைகள்' எனில் ஒரு கோட்டில் உள்ள நான்கு புள்ளிகள் தரும் குறுக்குவீதம், மற்றக் கோட்டில் உள்ள நான்கு ஒத்த புள்ளிகள் தரும் குறுக்கு வீதத்திற்குச் சமமாகும்.

[பிரதியிட்டுச் சுருக்குதலின் விரிவு :

$$p = -\frac{(ra'+s)}{pa'+q}\ ;\ c = -\frac{rc'+s}{pc'+q}$$

$$\therefore\quad p-c = \frac{(rc'+s)\,(pa'+qc - (ra'+s)\,(pc'+q)}{(pa'+q)\,(pc'+q)}$$

$$= \frac{pas'+qrc'-psc'-qra'}{(pa'+q)\,(pc'+q)}$$

$$= \frac{(a'-c')\,(ps-qr)}{(pa'+q)\,(pc'+q)}$$

$$a-d = \frac{(a'-d')\,(ps-qr)}{(pa'+q)\,(pd'+q)}$$

$$\therefore\quad \frac{a-c}{a-d} = \frac{a'-c'}{a'-d'}\cdot\frac{pd'+q}{pc'+q}$$

$$\frac{b-c}{b-d} = \frac{b'-c'}{b'-p'}\cdot\frac{pd'+q}{pc'+q}$$

$$\therefore\quad \frac{a-c}{a-d}\cdot\frac{b-d}{b-c} = \frac{a'-c'}{a'-d'}\cdot\frac{b'-d'}{b'-c'}$$

$\therefore\ (ab;cd) = (a'b';c'd')$]

8·11. மறுதலையாக (Conversely)

AA'; BB'; CC', என்பவை முறையே l, l' எனும் கோடுகளின் குறிப்பிட்ட புள்ளிகளாகுக. X, X' எனும் மாறும் சோடிப் புள்ளிகள் $(AB, CX) = (A'\ B'\ C'\ X')$ எனும் படி அமைந்தால் அவை தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசைகளை ஏற்படுத்தும்.

நிரூபணம்

A, B, C, X: $A'\ B'\ C'\ X'$ இவற்றின் துணை அலகுகள் $a\ b\ c\ x$: $a'\ b'\ c'\ x'$ ஆகுக.

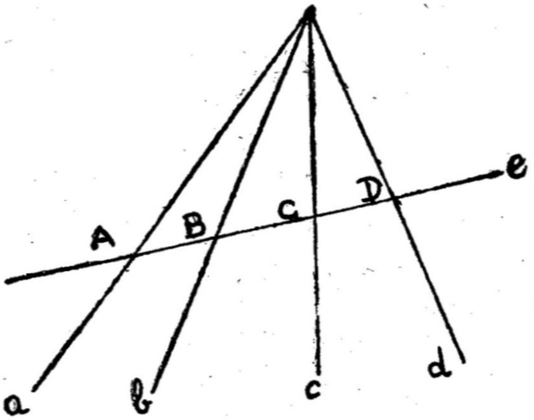
என்றால் $(A\ B,\ \ C\ X) = (A'\ B',\ C'\ X')$ ஆவதால்

$$\frac{a-c}{a-x}\cdot\frac{b-x}{b-c} = \frac{a'-c'}{a'-x'}\cdot\frac{b'-x'}{b'-c'}$$

இதை $pxx' + qx + rx' + s = 0$ எனும் தொடர்பாக எழுதலாம். p, q, r, s எனும் குணகங்கள் $a, b, c, a'\ b'\ c'$ இவற்றைச் சார்ந்தவை. எனவே $x'x'$ மாறும் போது தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசையை ஏற்படுத்துகின்றன. இவ்வாறு மூன்று சோடிப்புள்ளிகள் ஒரு குறிப்பிட்ட தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசையை ஏற்படுத்துகின்றன.

5·12. புள்ளி வரிசையின் குறுக்கு வீதமும் கோட்டுக் கற்றையின் குறுக்கு வீதமும்

ஒரு புள்ளி வழியுள்ள நான்கு கோடுகளின் குறுக்கு வீதமும் அவற்றால் ஒரு குறுக்குவெட்டியில் ஏற்படும் புள்ளி வரிசையின் குறுக்கு வீதமும் சமமாகும்.



படம். 11

l எனும் கோடு, L வழிச் செல்லும் நான்கு கோடுகள் a, b, c, d ஐ முறையே A,B,C,D எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். l ல் உள்ள A,B,C,D யின் துணை அலகெண்கள் முறையே $x_1\ x_2\ x\ \ x_4$ ஆகுக. ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் என ஒரே கோடு a,b,c,d யுள்ளதால், கோடுகளின் துணையலகெண்கள் $x_1', x_2', x\ '\ x_4'$ ம் $x_1, x_2\ x_3, x_4$ (1-1) தொடர்புடை எண்களாகும்.

$$\therefore\ \ (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1', x_2', x_3', x_4')$$

$$\therefore\ \ \ (A\ B,\ C\ D) = L(ab,\ cd)$$

5·13. *குறிப்பு 1.* வேறொரு குறுக்கு வெட்டி l' இக்கோடுகளை A', B', C', D', எனும் புள்ளிகளில் வெட்டினால் இதுபோன்று $(A', B', C', D') = L\,(ab, cd)$ ஆகும்.

$$\therefore\ (AB, CD) = (A'\,B', C'\,D')$$

அதாவது எந்த ஒரு நாற்கோட்டுக் கற்றையும் குறுக்கு வெட்டிகளின் மேல் சம குறுக்கு விகிதமுள்ள புள்ளி வரிசைகளை ஏற்படுத்தும்.

குறிப்பு 2. இசைக் கோட்டுக்கற்றை, குறுக்கு வெட்டிமேல் இசைப்புள்ளி வரிசையை ஏற்படுத்தும்.

5.14. *குறியீடு*

இருதொடர்புடைப் புள்ளிவரிசைகளில் ஒத்த நான்கு புள்ளிகளின் குறுக்கு விகிதம் சமம் என்பதால், அவை தொடர்புடைப் புள்ளிவரிசை என்பதை

$l\,(ABC\ ....\ ) = l'\,(A'\ B'\ C'\ ....\ )$ எனக் குறிக்கலாம். அல்லது $(ABC\ ....\ ) = (A'\ B'\ C'\ ....)$ எனவும் குறிக்கலாம்.

இதே போன்று தொடர்புடைக் கோட்டுக்கற்றைகளை $L\,(abc\ ....\ ) = L'\,(a'\ b'\ c'\ ....\ )$ எனக் குறிக்கலாம்.

கோட்டுக்கற்றையும் புள்ளிவரிசையும் தொடர்புடையனவானால் $L\,(abc\ ....\ ) = l\,(ABC\ ....\ )$ எனக் குறிக்கலாம்.

5.15. *பார்வையில் அமையும் புள்ளி வரிசைகள்* **(Perspective Ranges)**

l, l' எனும் இருகோடுகளில் அமையும் புள்ளிவரிசையில் உள்ள ஒத்தபுள்ளிகள் வழியுள்ள கோடுகள் யாவும் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளானால், இருபுள்ளிவரிசைகளும் பார்வையில் (*in Perspective*) அமைகின்றன எனச் சொல்லப்படும். கோடுகள் செல்லும் புள்ளி 'பார்வை மையம்' (*Centre of perspective*) எனப்படும்.

இருபான்மையாக, L, L' எனும் புள்ளிகளில் அமையும் இரு கோட்டுக் கற்றைகளில் உள்ள ஒத்த கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் ஒருகோடமைவன. ஆனால், கோட்டுக்கற்றைகள் இரண்டும் 'பார்வையில்' (*in perspective*) அமைந்துள்ளன எனக் கூறப்படும் புள்ளிகள் அமையும் கோடு 'பார்வை அச்சு' (*axis of perspective*) எனப்படும்.

முக்கியமான தேற்றம் ஒன்றை நிறுவுவோம்.

3·16. தேற்றம்

பார்வையில் அமையும் இருபுள்ளிவரிசை தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசைகளாகும். அவையமையும் கோடுகள் வெட்டும்புள்ளி தொடர்பு வரிசையின் ஒன்றுசேர் ஒத்தபுள்ளி (**united point or self corresponding point**) யாகும்.

l, l' எனும் கோடுகளில் அமையும் புள்ளிவரிசைகள் பார்வையில் அமையட்டும். பார்வைமையம் L ஆகுக. l, l' வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி A ஆகுக. L வழிச்செல்லும் ஏதேனும் ஒரு கோடு l-ஐ y-லும் l'-ஐ x'-லும் வெட்டட்டும்.

X, X' ஒன்றற்கொன்றே எனும் புள்ளிகளெனத் தெளிவாய்க் காண்கிறது. ஆகவே அவைகளால் ஏற்படும் புள்ளிவரிசை தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசையாகும் LA எனும்கோடு l-ஐயும் l-' ஐயும் Aயில் வெட்டுவதால் இங்கு X, X' ஒன்று சேர்கின்றன. ∴ A_1 இரு தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசைகளின் ஒன்று சேர் ஒத்த புள்ளியாகிறது.

மறுதலையாக : l, l' எனும் கோடுகளில் தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசைகள் அமையட்டும். l, l' வெட்டும்புள்ளி A இருவரிசைகளின் ஒன்றுசேர் ஒத்தபுள்ளியாகுக. lல் அமையும் B, C, D, என்ற புள்ளிகளின் ஒத்தபுள்ளிகள் l'ல் $B'; C'! D'$. $BB! CC'$ வெட்டும்புள்ளி L ஆகுக. LD எனும்கோடு l'ஐ D''ல் வெட்டட்டும். D'ம் D''ம் ஒரே புள்ளி என்று காட்டுவோம்.

புள்ளிவரிசைகள் தொடர்புடையனவாதலால் $(AB', C'D')$ $=(AB, CD)=K$ என்க $(ABCD)$, $(AB'C'D'')$ எனும் புள்ளி வரிசைகள் பார்வையில் அமைவதால் (*in perspective*) $(A\ B\ C\ D')$ $(A; B'C'D') = (A, B'C'D')\ (=K)$ ∴ D'ம் D''ம் ஒன்றுசேர்கின்றன. அதாவது $D'D$ம் L வழிச் செல்லும்.

கணக்கு: இரண்டு கோடுகளில் அமையும் இரண்டு தொடர் புடைப்புள்ளி வரிசைகளில் கோடுகள் வெட்டும்புள்ளி ஒன்றுசேர் ஒத்த புள்ளியாகுக. v, v' என்பவை $l\ l'$ல் வேறு இரண்டு ஒத்தபுள்ளிகளானல் இன்னும் மற்ற இரு ஒத்தபுள்ளிகளை $o+xv, o+xv'$ எனக் குறிக்க முடியும்.

தீர்வு: இருகோட்டமையும் தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசைகள் அவை வெட்டும்புள்ளியை 'ஒன்றுசேர் ஒத்த' புள்ளியாகக் கொண்டமையால், புள்ளிவரிசைகள் 'பார்வையில்' அமைபவை. L எனும் புள்ளி பார்வைமையம் ஆகுக. vv' எனும் கோட்டில் L எனும் புள்ளியுள்ளது. L, v' எனும் புள்ளிகளை ஆதாரப்புள்ளிகளாகவும் vஐ அலகுப்புள்ளியாகவும் கொள்க. ∴ $v = L + v'$

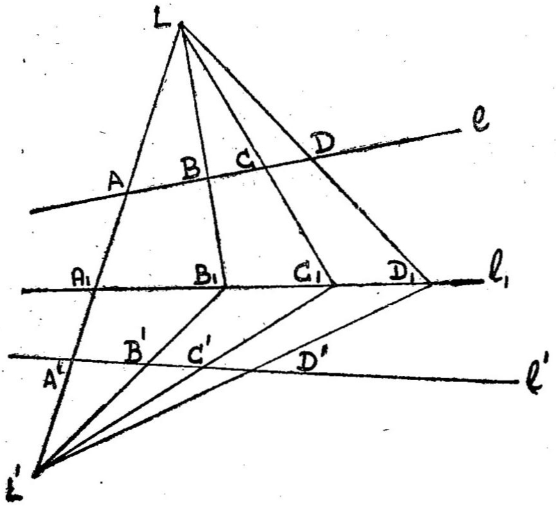
∴ $L=v\text{-}v'$ P,P' என்பவை வேறிரு ஒத்தபுள்ளிகளாகுக. $P=o+xv$; $P'=o+x'v$ ஆனால் $P-P'=xv-x'v'$ என் PP' ; vv' எனும்கோடுகள் வெட்டும்புள்ளி Lஐத் தருகிறது. ∴ L எனும்புள்ளி $u-v'$ என்றோ அல்லது $xv-x'v'$ என்றோ குறிக்கப்படுகிறது. இவையிரண்டும் ஒரேபுள்ளியென்றால் $x=x'$ ஆகவேண்டும். ∴ P,P' எனும் ஒத்த புள்ளிகள் $o+xv, o+xv'$ எனத் தரப்படுகிறது.

(அதாவது $pxx'+qx+rx'+s=o$ எனும் சமன்பாடு $x'-x=o$ என ஆகிறது.)

5·17. தேற்றம்

ஏதேனும் இரண்டு கோடுகளில் அமையும் 'தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசைகள் ஒவ்வொன்றும், மூன்றாவது ஒரு கோட்டில் உள்ள புள்ளி வரிசையுடன் பார்வையில் அமையுமாறு இருக்க முடியும்.

l,l' எனும் கோடுகள் ஒரேதளத்தில் அமையும் கோடுகளாகவும், அவற்றில் உள்ள புள்ளிவரிசைகள் தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசைகளாகவும் இருக்கட்டும். l-ல் அதாவது $l(ABC....)=L(A'B'C':)$ ஆகுக.



படம். 12

AA' கோட்டில் L, L' எனும் இரு புள்ளிகளைக் கொள்க. $LB, L'B'$ எனும் கோடுகள் B_1ல் சந்திக்கட்டும். $LC, L'C'$ எனும்

கோடுகள் C_1–ல் சந்திக்கட்டும். B_1C_1–எனும் கோட்டை l_1–என அழைப்போம். இதை AA' எனும் கோடு A_1ல் வெட்டட்டும். l ல் D எனும் புள்ளிக்கு ஒத்தபுள்ளி l'–ல் D' ஆகுக. LD எனும் கோடு l_1–ஐ D_1–லும் $L'D'$ எனும் கோடு L_1–ஐ D_2–லும் வெட்டட்டும்.

$(ABCD...)$ யும் $(A_1B_1C_1D,..)$யும் பார்வையில் அமையும் புள்ளிவரிசைகளாதலால் $(AB, CD) = (A_1B_1\ C_4D\ )$.
அதே போல $(A'B,'\ C'D) = (A_1B_1C_1D_2)$

ஆனல் $(ABCD\ ..)$ யும் $(A'B'C'D'\ ..)$யும் ஒத்த புள்ளிவரிசை களாதலால்

$$(AB, CD) = (A'B', C'D')$$

$$\therefore\ (A_1B_1\ C_1D_1) = (A'B'\ C'D')$$

$\therefore$ D,ம் D_2ம் ஒன்று சேர் புள்ளிகளாகும்

ஆகவே $(A\ B\ C\ D_1)$ $(A'\ B'\ C'\ D'\ )$ எனும் இருபுள்ளி வரிசைகள் ஒவ்வொன்றும் $(A_1B_1C_1D_1)$ எனும் புள்ளி வரிசை யுடன் 'பார்வையில்' அமைகின்றன.

ஆகவே $(A_1B_1C_1....)$ எனும் வரிசையும் $(A'B'C'....)$ எனும் வரிசையும் $(A,B,E, ...)$ எனும் வரிசையுடன் பார்வை மையத்தில் உள்ளன.

குறிப்பு : $(AB,C....)$, $(A'B'C'....)$ எனும் இரு தொடர்புடைப் புள்ளிவரிசைகளுக்கு E என்பது ஒரே 'ஒன்று சேர்புள்ளி'யானல் A_1B_1 எனும் கோடு E வழிச் செல்லும்.

5·18. தொடர்புடைக் கோட்டுக் கற்றைகள்;

ஒரு தளத்தில் புள்ளியின் இருபான்மை உருப்படி கோடு என்று கூறினேம்.

'l எனும் கோட்டில் உள்ள புள்ளி வரிசை' என்பதன் இரு பான்மை 'L என்னும் புள்ளி வழியுள்ள கோட்டுக் கற்றை' என்ப தாம். அதன் வழியுள்ள u v, எனும் இருகோடுகளை ஆதாரக் கோடுகளாகக் கொண்டால் $v+\theta v$ என்பது θவின் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்கு L வழி பல கோடுகளடங்கிய கோட்டுக்கற்றை யைத்தரும். அதேபோல L' எனும் புள்ளிவழியுள் இருகோடுகள் u' v' என்றால் $u'+\theta v'$ என்பது இன்னெரு கோட்டுக் கற்றையைத் தரும். θ, θ' என்பவை முறையே இருகோட்டுக்கற்றைகளில் உள்ள கோடுகளின் துணை அலகெண்கள் எனப்படும்.

இரண்டு கற்றைகளிலும் உள்ள கோடுகளில் ஒன்றில் உள்ள ஒரு கோட்டுக்கு மற்றதில் ஒரே கோடென 'ஒன்றற்கொன்றே' யெனும் தொடர்பிருப்பின் அவற்றின் ஒத்த அலகெண்கள் (Corresponding Parameters) θ, θ' என்பவை,

$p\theta\theta'+q\theta+r\theta'+s=0$ எனும் சமன்பாட்டிற் கிணங்கியவையாக இருக்கும். இவ்வாறுள்ள இரு கோட்டுக் கற்றைகள் தொடர்புடைக் கற்றைகள் எனப்படும்.

குறிப்பு 1. L, L' எனும் இரு புள்ளிகளில் அமையும் தொடர்புடைக் கோட்டுக் கற்றைகளில் $L\,(ab, cd)=L'\,(a'b', c'd')$ என குறுக்கு வீதம் சமமாக இருக்கும்.

குறிப்பு 2. கோட்டுக் கற்றையில் உள்ள நான்கு கோடுகள் தரும் குறுக்குவீதம், அது ஒரு குறுக்கு வெட்டியில் ஏற்படும் நான்கு புள்ளிகளின் குறுக்கு வீதத்திற்குச் சமம் என்று கூறியுள்ளோம்.

அதனால் $L\,(a\;b\;c\;d\;....)$ ஒரு கோட்டில் $l\,(A\;B\;C\;D\;....)$ எனும் புள்ளி வரிசையையும் $L'\;(a'\;\;b'\;\;c'\;\;d'....)$ எனும் கற்றை மற்றொரு கோட்டிலோ அல்லது அதே கோட்டிலோ $(A'\;B'\;C'\;D'\;....)$ எனும் புள்ளிவரிசையையும் ஏற்படுத்தினால் இரண்டும் தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசைகளாகும்.

3·18. ஒரு கோடமைத் தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசைகள் (Related Ranges on the same base)

l, l' எனும் இரு வெவ்வேறு கோடுகளில் அமையும் தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசைகளைப் பற்றி ஆராய்ந்தோம். இரு கோடுகளும் ஒன்றானால் அவை ஒரு கோடமைத் 'தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசை' எனப்படும்.

புள்ளிகள் $X = 0 + xv$

$X' = 0 + x'v$ இரண்டும் x, x'-ன் வெவ்வேறு மதிப்புக்களுக்கு OV எனும் கோட்டில் வெவ்வேறு புள்ளிகள் கொண்ட புள்ளி வரிசைகளைத் தரும். x, x' எனும் எண்கள் $p\,x\,x' + q\,x + r\,x' + s = 0\;(p\,s - q\,r \neq 0)$ எனும் கட்டுப்பாட்டிற்கு இணங்கி இருக்க வரும் புள்ளி வரிசைகள் தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசைகள் (Related Ranges) எனப்படும்.

l எனும் கோட்டில் உள்ள ஒரு புள்ளி (X) எனும் புள்ளி வரிசையைச் சேர்ந்ததாகவோ அல்லது (X') எனும் புள்ளி

வரிசையைச் சேர்ந்ததாகவோ கருதப்படலாம். (X) எனும் புள்ளி வரிசையைச் சார்ந்த E எனும் புள்ளிக்கு (X') எனும் புள்ளி வரிசையில் E' ஆகுக. அவற்றின் அலகெண்கள் e. e' ஆனல் $pee' + qe + re' + s = 0$ ஆகும்.

$e' = e$ என்ருல் E' என்பது E யே ஆகும். அதாவது (X)-ல் உள்ள E-க்கு (X')-ல் உள்ள ஒத்தபுள்ளி அதுவேயாகும். இத்தகைய புள்ளி 'ஒன்றுசேர்' புள்ளி (united point அல்லது double point அல்லது self corresponding point) எனப்படும். அப்போது $e' = e$ ஆவதால், இத்தகைய புள்ளியின் துணை அலகெண்,

$pt^2+(q+r)t+s=0$ எனும் இருபடிச்சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். இரண்டு மூலங்கள் e. f உள்ளனவாகையால் இரண்டு ஒன்று சேர்புள்ளிகள் உள்ளன. $(q+r)^2 - 4ps \neq 0$ என்ருல் e, f இரண்டும் வெவ்வேறெண்கள். ஆகவே வெவ்வேறு புள்ளிகளைத் தரும். இவை தரும்புள்ளிகள் E, F, ஆகுக. E, F ஆதாரப்புள்ளிகளானல் புள்ளிவரிசையில் உன்ள ஒத்தபுள்ளிகளை $E+xF$ எனவும் $E+x'F$ எனவும் கூறலாம், E-ன் துணை அலகெண் 0; Fன் துணை அலகெண் ∞ ஆகும். $(0, 0)$ என்பதையும் (∞, ∞) என்பதையும் முறையே.

$pxx'+qx+rx'+s=0$ எனும் சமன்பாட்டில் பிரதியிட $p=0$ $s=0$ என வருகிறது.

$$\therefore \quad x^1 = -\frac{q}{r}x = Rx \text{ என்க.}$$

ஆகவே ஒரு கோடமைப்புள்ளி வரிசையில் இரு ஒன்றுசேர் புள்ளிகளை ஆதாரப்புள்ளிகளாகக் கொள்ள மற்ற ஒத்த புள்ளிகளின் துணை அலகெண்களை x_1 Rx எனக் குறிக்கலாம். E, F ஒன்றுசேர்புள்ளிகளானல் $E+xF$, $E+RxF$ என்பவை ஒத்த புள்ளிகளாகும்.

ஒன்று சேர் புள்ளிகள் வெவ்வேருயிராது ஒரேபுள்ளியானல்

$pt^2+(q+r)\ t+s=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஒன்று சேர $(q+r)^2=4ps$ ஆக இருக்கவேண்டும். இதற்கேற்ற ஒத்த புள்ளி E ஆகுக.

கோட்டில் O எனும் ஒரு புள்ளியையும், Eஐயும் ஆதாரப்புள்ளிகளாகக் கொள்வோம். Eன் துணை அலகெண் ∞. Eக்கு ஒத்த புள்ளியாதலால் $x=\infty$. $x^1=\infty$ என்பது. $pxx^1+qx+rx^1+s=0$

ஏனும் சமன் பாட்டிற்கு இணங்கவேண்டும். $\therefore\ p = 0$, $(q+r)^2 = 4ps$ ஆனதால் $q + r = 0$. $\therefore\ r = -q$.

$\therefore$ சமன்பாடு $q\,(x - x^1) = -s$.

$$\therefore \qquad qx^1 = qx + s$$

$$x^1 = x + \frac{s}{q} = x + R$$

என வருகிறது.

ஆகவே ஒருகோடமைத் தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசையில் உள்ள ஒன்றுசேர்புள்ளி E ஒன்றேயானால் அதை ஆதாரப்புள்ளியாகவும், மற்றும் ஏதேனும் O என்ற புள்ளியை மற்றொரு ஆதாரப் புள்ளியாகவும் கொண்டால் மற்ற ஒத்தபுள்ளிகள் $O+xE$, $O+(x+R)\,E$ எனும் குறியீடுகளால் தரப்படும்.

5·19. குறிப்பு 1. ஒரு கோடமைத் தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசையில் E, F ஒன்று சேர்புள்ளிகள். AA' ; BB' வேறு இரு ஜோடி ஒத்தபுள்ளிகள் என்றால் $(EF, AB) = (EF, A'B')$ ஆகும்.

$$A = E + aF \text{ என்றால் } A' = E + RaF$$

$$B = E + bF \text{ என்றால் } B' = E + RbF$$

E, F, ஆதாரப்புள்ளிகள் ஆதலால் E, Fன் துணை எண்கள் முறையே o, ∞ ஆகும்.

$$\therefore \quad (EF, AB) = (o, \infty, a, b) = \frac{a}{b}$$

$$(EF, A'B') = (o, \infty, Ra, Rb) = \frac{a}{b}$$

$$\therefore \quad (EF, AB) = (EF, A'B')$$

5·20. குறிப்பு: தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசையில், இரண்டுக்கு மேற்பட்ட ஒத்தபுள்ளிகள் 'ஒன்றுசேர் புள்ளிகளானல்' ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒன்றுசேர் ஒத்தபுள்ளிகளாகும்.

ஏனெனில் E, F, G என்பவை ஒன்றுசேர் ஒத்தபுள்ளிகளானல் $(EF, GX) = (EF, GX')$ [இங்கு XX' ஒத்தபுள்ளிகளாகும்] $\therefore X = X'$ ஆகவே ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒன்றுசேர் புள்ளியாகும்.

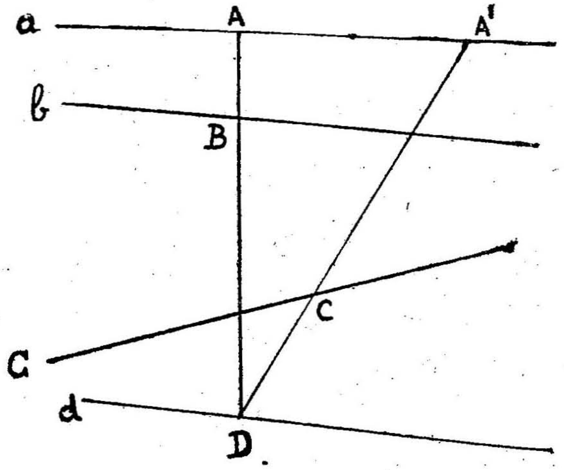
[இதை வேறு விதமாகவும் காணலாம். ஒன்றுசேர் புள்ளிகளின் துணை அலகெண்கள் $pt^2 + (q+r)\ t+s=0$ என்பதின் மூலங்கள். இது இருபடிச்சமன்பாடாகும். மூன்று ஒன்றுசேர் புள்ளிகள் இருந்தால், மேற்கூறிய சமன்பாடு இயற்கணிதப்படி முற்றொருமையாகும், $\therefore\ r=(q+r)=s=0\quad \therefore\ q+r=0.$

$$\therefore\ q\,(x\text{-}x') = 0\,;\ x=x$$

$\therefore\ o+xv$ இன் ஒத்தபுள்ளி $o+xv$ யே என வருகிறது.]

5·21. முப்பரிமாண வெளியில், வெட்டாக் கோடுகள் நான்கையும் வெட்டும் குறுக்குவெட்டிகள் இரண்டே

தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசையின் ஒன்று சேர்புள்ளிகளைப் பயன்படுத்தி மேற்கூறியதை நிலைநாட்டலாம்.



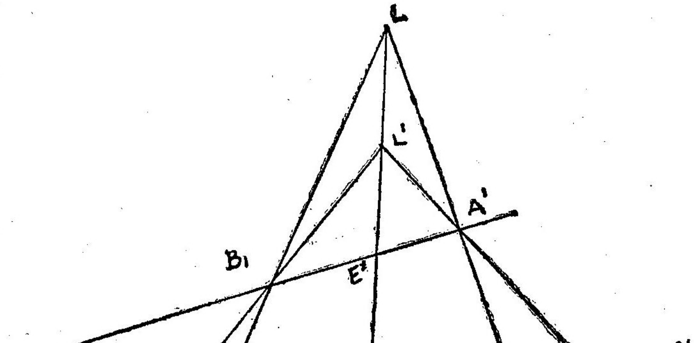
படம். 13

a, b, c, d என்பவை நான்கு வெட்டாக்கோடுகள். a யில் A என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. A, b அடக்கும் தளத்தை d எனும் கோடு Dயில் வெட்டினால் AD எனும்கோடு bஐ Bயில் வெட்டும். அமைவுத் தேற்றத்தினல் Aவழி, $b\ d$ஐ வெட்டும் கோடு ஒன்றேஉள்ளது என்பதை அறிகிறோம். [A, b வழி ஒரேதளம் உள்ளது. d எனும் கோடு இந்தத் தளத்தை ஒரே புள்ளி D யில் வெட்டும். AD வழி ஒரே கோடுள்ளது என்பதால்]. இதே போல D வழியாக, d, c, a ஐ வெட்டக்கூடிய கோடு ஒன்றே உள்ளது. அது 'a' ஐ A' ல்

வெட்டட்டும். அப்போது A, A' எனும் புள்ளிகள் 'ஒன்றற்கொன்றே' எனும் தொடர்புடைப்புள்ளியாகும். இவ்வாறு lல் பல புள்ளிகள் (A) யைக் கொள்ள அதற்கேற்ற ஒத்தபுள்ளிகள் (A') வருகின்றன. 'ஒன்றற்கொன்றே' யெனும் தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசை அமைகிறது. இந்த வரிசைக்கு E என்பதுவும் F என்பதுவும் ஒன்றுசேர் புள்ளியானல், E வழி b,d ஐ வெட்டி மீண்டும் $d, c\ a$ ஐ வெட்ட E யிலேயே சந்திக்கும். இவ்வாறு E வழிநான்கு வெட்டாக் கோடுகளை வெட்டக்கூடிய கோடுகள் இரண்டேயுள்ளன.

குறிப்பு: இரண்டிற்கு மூன்று கோடுகள் இருந்தால் ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒன்றுசேர்புள்ளியாவதால் எண்ணற்ற கோடுகள் நான்கு கோடுகளையும் வெட்டும்.

5·22. ஒருகோடமையும் தொடர்புடைப் புள்ளிவரிசைகள் வேறொரு கோட்டிலமையும் புள்ளிவரிசையுடன் 'பார்வை'யில் அமையும்.



படம். 14

l எனும் கோட்டிலமையும் தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசை $l(ABC$: $= l(A'B'....)$ ஆகுக. இவற்றின் ஒன்றுசேர்புள்ளிகள் E,F ஆகுக. E வழியாகவுள்ள ஒரு கோட்டில் L,L' புள்ளிகள் LA, $L'A'$ எனும் கோடுகள் A_1லும் LB, $L'B'$ எனும் கோடுகள் B_1லும் சந்திக்கட்டும். LL' எனும்கோடு A_1B_1 ஐ E_1ல் சந்திக்கட்டும்.

அப்போது $(A_1 B_1 E_1 ...)$ எனும் புள்ளிவரிசை $(ABE ...)$ எனும் வரிசையுடனும் $(A' B' E ...)$ உடனும் பார்வையில் அமைகின்றன. [L, L' என்பவை முறையே அவற்றின் பார்வைமையங்கள்].

$\therefore$ A, B_1 எனும் கோடும் AB எனும் கோடும் வெட்டும்புள்ளி இவற்றிற்கு 'ஒன்றுசேர்' புள்ளிகள். இதேபோல $(A, B \ldots$ வரிசைக்கும் $(A' B' \ldots)$ வரிசைக்கும் வெட்டும்புள்ளி ஒன்றுசேர் புள்ளி. ஆகவே வெட்டும் புள்ளி $(ABC \ldots)$ $(A' B' C' \ldots)$ எனும் வரிசைகளின் ஒன்றுசேர்புள்ளியாகிய F ஆகும்.

5·23. ஒரு முனையில் அமையும் தொடர்புடைக்கோட்டுக் கற்றை (Related pencils with Common Vertex).

ஒரே கோட்டில் அமையும் தொடர்புடைப் புள்ளிவரிசைகளின் இருபான்மை, ஒரே புள்ளியை முனையாகவுடைய தொடர்புடைக் கோட்டுக்கற்றையாகும். u, v எனும் இரு கோடுகளை ஆதாரக் கோடுகளாகக் கொண்டால் ஒத்தகோடுகள் $u+\theta v$, $u+\theta' v$ ஆகுக. அப்போது $p\theta\theta'+q\theta+r\theta'+s=0$ எனவாகும். ஒரு கோட்டின் ஒத்த கோடு அதுவேயானல் $\theta=\theta'$ ஆகும். ஆகவே கோட்டின் துணை அலகெண்.

$(pt^2+(q+r)\,r+s=0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங் களாகும். இருபடிச் சமன் பாட்டின் மூலங்கள் θ_1, θ_2 ஆகுக. இத்தகைய கோடு இரண்டு உளது எனக் காண்கிறோம். இத் தகைய கோடுகளை 'ஒன்று சேர் ஒத்த' (*united*) கோடுகள் என அழைப்போம். $(q+r)^2-4ps\neq 0$ என்றால் இரு வெவ்வேறு கோடு கள் 'ஒன்றுசேர் கோடுகளாகும்'. $(q+r)^2=4pr$ என்றால் ஒரேகோடு ஒன்று சேர்கோடாகும்.

5·24. ஒரு கோட்டில் அமையும் 'அடுக்குப் புள்ளி வரிசை' (Involution Range on a line)

ஒரே கோட்டில் இரண்டு தொடர்புடை வரிசைகளைக் கொள் வோம். அவை $(ABCX \ldots)$; $(A' B' C' X' \ldots)$ ஆகுக. கோட்டில் உள்ள புள்ளி X ஐ முதல் வரிசையைச் சேர்ந்ததாகவோ அல்லது இரண்டாவது வரிசையைச் சேர்ந்ததாகவோ கருதலாம். X என்பது முதல் புள்ளி வரிசையில் உள்பட்டதானல், அதன் ஒத்த புள்ளி இரண்டாவது வரிசையில் X' ஆகும். ஆனல் X ஐ இரண் டாவது புள்ளி வரிசையின் புள்ளியாகக் கருதினல் அதற்கொத்த முதற் புள்ளி வரிசை X' அல்ல. ஆனல் X'' எனும் மற்றொரு புள்ளி யாகும்.

(உதாரணமாய் $xx'-x-4x'+6=0$ எனும் சமன்பாட்டைக் கொள்வோம். $x=0$ என்றால் $x'=3/2$ என வருகிறது. ஆனல் '0 தரும் புள்ளியை இரண்டாவது வரிசையில் கொண்டால் $x'=0$ ஆகும். அப்போது $x=6$. இவையிரண்டும் வெவ்வேறு புள்ளிகளைத் தருகின்றன)

மேற்கூறிய இரண்டு தொடர்புடைப் புள்ளிவரிசையின் ஒன்று சேர் புள்ளிகள் $E.F$ ஆகுக. இவையல்லாத முதல் வரிசையில் உள்ள புள்ளி yன் இரண்டாவது வரிசையில் ஒத்தபுள்ளி y' ஆகுக. x ஐ இரண்டாவது வரிசைப் புள்ளியாகக் கொள்ள

$x'' = x'$ என்றால் (x'), (x'') என்ற இரு தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசைகளில் E, F, x என மூன்று 'ஒன்று சேர் ஒத்த புள்ளிகள்' வருகின்றன. அதனால் எல்லாப் புள்ளிகளும் ஒன்று சேர் புள்ளிகளாகின்றன. $\therefore$ x எனும்புள்ளியை (x) என்றதின் அங்கமாகவோ அல்லது (x') இன் அங்கமாகக்கருத அதன் ஒத்தபுள்ளி x' என்றால் மற்றப்புள்ளிகளுக்கும் அவ்வாறே அமையும்.

குறிப்பு 1 : இவ்வாறு அமைவதற்கு E, F வெவ்வேறாக இருக்கவேண்டும் என்பதைக் காண்கிறோம். ஆகவே அடுக்குப் புள்ளி வரிசையில் 'ஒன்றுசேர் புள்ளிகள்' வெவ்வேறாகும்.

குறிப்பு 2 : சாதாரணத் தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசைகளின் x இன் ஒத்தபுள்ளி x' எனும்போது x ஐ முதல்வரிசைப் புள்ளியாகவும், x'ஐ இரண்டாவது வரிசைப் புள்ளியாகவும் வரிசைப் படுத்திக் கூறுகிறோம். ஆனால் 'அடுக்குப்புள்ளி' வரிசையில் x எந்த வரிசையிலாயினும் x' என்பது மற்ற வரிசையைச் சேர்ந்தது. எனவே வரிசையாக x, x' என்று கூறத் தேவையில்லை. x, x' எனினும் xx' எனினும் ஒன்றே. ஆகவே xx' எனும் அடுக்குப்புள்ளி வரிசையில் ஒத்தபுள்ளிகளைச் 'சோடிப் புள்ளிகள்' (*mates*) என்போம்.

குறிப்பு 3 : EF என்பவை ஒன்றுசேர் புள்ளிகள். $x\ x'$ என்பவை 'சோடிப்' புள்ளிகள். இவை தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசையில் உள்ளதால் $(EF, xx') = (EF, x'\ x)$ $\therefore$ $(E, Fxx') = -1$ அதாவது இசைப்புள்ளி வரிசையாகும். அடுக்குப்புள்ளி வரிசையில் இரு ஒன்றுசேர் புள்ளிகளும், சோடிப்புள்ளிகளும் ஒன்றற்கொன்று இசைப்பிரிவுப் புள்ளிகளாகும்.

6·25. *அடுக்குப்புள்ளி வரிசையின் தொடர்புச் சமன்பாடு*

அடுக்குப் புள்ளிவரிசை, தொடர்புடைப் புள்ளிவரிசையில் சிறப்புப்புள்ளி (Special Case) யாதலால், சோடிப்புள்ளிகளின் துணை அலகெண்கள் x, x'.

$pxx' + qx + rx' + s = o$ எனும் சமன்பாட்டிற் கிணங்கிய தாகும். xஇன் ஒத்த எண் x'; x'இன் ஒத்த எண் x ஆனதால்,

$px'x + qx' + rx + s = 0$ என ஆகிறது. கழித்தபின் $(q-r)(x-x') = 0$ என ஆகும்.

$q=r$ எனவருகிறது$(x \neq x')$. ஆகவே அடுக்குத்தொடரின் சமன்பாடு,

$pxx' + q(x+x') + s = 0$ (1) ஆகும். இங்கு p,q,s எனும் மூன்று. குணகங்களின் விகித எண்களை (*proportionate number*) க்காண x,x' இரண்டு ஒத்தமதிப்புக்கள் தரப்பட்டால்போதும். ஆகவே இரண்டு சோடிப்புள்ளிகள் ஒரு அடுக்கு வரியை நிச்சயிக்கும். $(x, x_,')$ $(x_2\ x_2')$ என்பவை இருசோடிப்புள்ளிகளைத் தந்தால் அவை நிச்சயிக்கும் அடுக்குவரிசையின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} xx' & (x+x') & 1 \\ x_1x' & (x_1+x_1') & 1 \\ x_2x_2' & (x_2+x_2') & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும்}$$

குறிப்பு 1. E, F என்பவை ஒன்றுசேர் புள்ளிகளானல், அவற்றின் துணை அலகெண்கள் e, f என்ருல், மேல்சமன்பாட்டில் $x_,=x_,'=e\ ;\ x_2=x_2'=f$

$$\therefore \text{ சமன்பாடு } \begin{vmatrix} xx' & x+x' & 1 \\ x_1^2 & 2x_1 & 1 \\ x_2^2 & 2x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும்}$$

குறிப்பு 2. E, F எனும் புள்ளிகள் ஆதாரப் புள்ளிகளாகுக. $(x, x_,)$ என்பவை சோடிப்புள்ளிகளின் துணையலகெண்களாகுக. பொதுவாகத் தொடர்பு

$$Pxx' + q\,(x+x') + s = 0$$

ஆனுல் E, F எனும் ஒன்றுசேர் புள்ளிகள் இவற்றைச் சேர்ந்தது ஆதலால்

$(O, O) : (\infty, \infty)$ என்பவை இந்தச் சமன்பாட்டிற் கிணங்கியது

$$\therefore\ p=0\ ;\ s=0\ ; \qquad \therefore\ q\,(x+x')=0$$

$x'=-x$ எனத் தொடர்பு வருகிறது.

ஆகவே $E+xF$, $E-xF$, எனும் கோவைகள் x இன் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்கு அடுக்கு வரிசையின் சோடிப் புள்ளிகளைத்

தருகிறது. கோவையின் உருவங்களிலிருந்து சோடிப் புள்ளிகள் ஒன்றுசேர் இசைப் பிரிவுப் புள்ளிகள் எனத் தெரிகிறது.

குறிப்பு: $x'=x$ எனப் பிரதியிடவரும் $px^2+2qx+s=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஒன்று சேர் புள்ளிகளைத்தரும்.

3·26. மற்றொரு விதக் குறியீடு

அடுக்குப் புள்ளியின் ஏதேனும் சோடிப் புள்ளிகளை ஆதாரப் புள்ளிகளாகக் கொள்க. XX' என்பவை சோடிப்புள்ளிகள். அவற்றை ஆதாரப் புள்ளிகளாகக் கொள்ள Xன் துணை அலகெண் o ;x' இன் துணை அலகெண் ∞. சமன்பாடு $pxx'+q\ (x+x')+s=0$ என்பதில் $x=0$; $x'=\infty$ எனப் பிரதியிட:

முதலில் x' ஆல் வகுப்போம்: $px+\frac{9x}{x'}+q+\frac{s}{x'}=0$

$x=0$; $x'=\infty$ என்றால் $q=0$ ஆகிறது

$$\text{அ} \quad pxx' = -s \qquad \therefore \quad xx' = K \qquad \left(R = -\frac{s}{p}\right).$$

ஆகவே அடுக்குப் புள்ளி வரிசையில் சோடிப் புள்ளிகளை $X+xx^1$; $xx+Rx'$ எனக் குறிக்கலாம். $x=x'$, என்றால் $x=x=\pm\sqrt{k}$ ஆகிறது, அடுக்குப் புள்ளி வரிசையின் ஒன்று சேர் புள்ளிகள் $x+\sqrt{k}x'$ $x-\sqrt{k}x'$ எனக் காண்கிறோம். ஆகையால் இவை x,x' ன் இசைப் பிரிவுப்புள்ளிகள் எனவும் காண்கிறோம். அதாவது அடுக்குப் புள்ளி வரிசையின் ஒவ்வொரு சோடிப் புள்ளிகளும், ஒன்று சேர் புள்ளிகளும் ஒன்றற்கொன்று இசைப் பிரிவுப் புள்ளிகளாகும்.

மறுதலையாக, இரண்டு புள்ளிகள் E, F உடன் XX' எனும் மாறும் சோடிப் புள்ளிகள் இசைப்பிரிவுப் புள்ளிகளாயின் (XX') என்பவை E, F ஐ ஒன்று சேர் புள்ளிகளாகக் கொண்ட அடுக்குப் புள்ளி வரிசையை ஏற்படுத்தும்.

கணக்கு 1: **ஒரு கோட்டில் அமையும் இரண்டு அடுக்கு வரிசைகளுக்குப் பொதுவாக ஒரு சோடிப்புள்ளிகள் உள்ளன.**

ஏனெனில் முதல் அடுக்கு வரிசையின் இரு ஒன்று சேர் புள்ளிகள் E, F ஆகுக. இரண்டாவது வரிசையின் ஒன்றுசேர் புள்ளிகள் $E'F'$ ஆகுக; $(E\ F)\ (E'F')$ எனும் இரு சோடிப் புள்ளிகள் தரும் மூன்றாவது அடுக்குப் புள்ளி வரிசையின் ஒன்றுசேர் புள்ளிகள் MM' ஆகுக, அப்போது $(EF,MM')=-1$ $(E'F',MM'$ $=-1$.

∴ MM' என்பது முதல் இரண்டு அடுக்குப் புள்ளி வரிசைகள் இரண்டிலும் அமையும் சோடிப் புள்ளிகளாகும்.

கணக்கு 2: இரண்டு புள்ளிகளின் இசைப்பிரிவுப் புள்ளி களாகவும் ஒரு அடுக்கு வரிசையின் சோடியாகவும் அமையும் புள்ளி கள் இரண்டேயுள்ளன.

கோட்டில் அமையும் ஒரு அடுக்கு வரிசையின் 'ஒன்று சேர் புள்ளிகள்' E, F, ஆகுக. P, Q, வேறிரு புள்ளிகள் ஆகுக. (P, Q) (E, F) நிச்சயிக்கும் மற்றொரு அடுக்கு வரிசையின் ஒன்று சேர் புள்ளிகள் (MN) ஆகுக. ∴ $(PQ, MN) = -1$: $(EF, MN) = -1$ ∴ MN முதல் அடுக்கு வரிசையின் சோடிப்புள்ளிகளாகும். இவை P Qன் இசைப்பிரிவுகளாகும்.

கணக்கு 3: A, B, C, D என்பவை ஒரு கோட்டில் உள்ள நான்கு வெவ்வேறு புள்ளிகள். A, B, C, D, தரும் அடுக்குப் புள்ளி வரிசையின் ஒன்று சேர் புள்ளிகள் E F ஆகும். A C, B D தரும் அடுக்கு வரிசையின் ஒன்றுசேர் புள்ளிகள் E′ F′ ஆகும் என்றால் $(EF, E'F') = -1$ என நிறுவுக.

E, F எனும் புள்ளிகளை ஆதாரப்புள்ளிகளாகக் கொள்க.

அப்போது $A = E + aF \quad C = E + cF$

$$B = E - aF \quad D = E - cF$$

AC, BD தரும் அடுக்குப் புள்ளி வரிசையின் சமன்பாடு

$pxx' + q(x + x') + s = 0$ ஆகுக.

$pac + q(a + c) + s = 0$ (AC சோடியாவதால்)

$pac - q(a + c) + s = 0$ (BD சோடியாவதால்)

AB, CD வெவ்வேறு ஆதலால் $a + c \neq 0$ ∴ $q = 0$; $pac = -s$

∴ சமன்பாடு $pxx' + s = 0$

$pxx' - pac = 0$ ∴ $xx' = ac$

இதன் ஒன்று சேர் புள்ளிகள் $E' = E + \sqrt{ac}F$

$F' = E - \sqrt{ac}F$ ∴ $E'F'$ என்பவையும் E, F எனும் புள்ளிகளும் ஒன்றற்கொன்று இசைப்புள்ளிகளாகும் அல்லது $(EF, E'F') = -1$.

5·27. அடுக்குப்புள்ளி வரிசையின் குறுக்கு வீதப்பண்பு (Cross ratio Property of an involution)

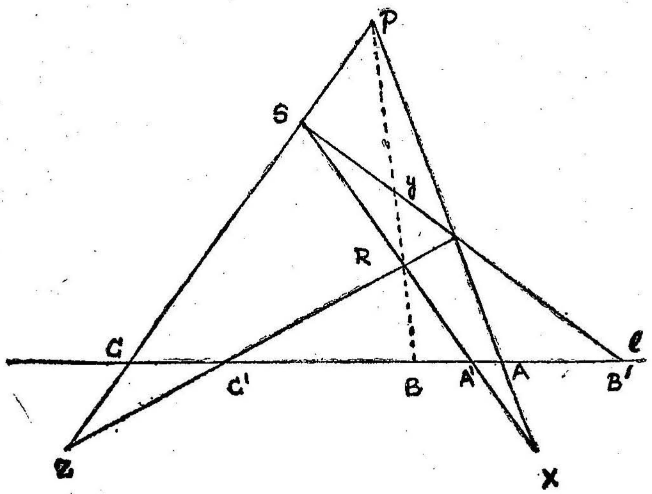
தேற்றம். AA'; BB'; CC'; எனும் மூன்று சோடிப்புள்ளிகள் ஒரே அடுக்கு வரிசையில் அமையத்தேவையும் போதுமான நிபந்தனை $(AB, CC') = (A'B', C'C)$ என்பதாம்.

தேவை : A, B, C, C' எனும் புள்ளிகளுக்கொத்த புள்ளியாக A', B', C', C அமைய $(AB, CC') = (A'B'; C'C)$ என்பது தேவை, இல்லை எனில் தொடர்புடை வரிசையாகக்கூட இருக்காது.

போதுமானது BB', CC' எனும் புள்ளிகள் தரும் அடுக்குப் புள்ளி வரிசையில் A யின் சோடி A' ஆகுக. $\therefore (AB, CC') = (A'B'C'C,)$ ஆனால் $(AB,CC') = (A'B',C'C)$ $\therefore (A'B',C'C) = (A'B',C'C)$ $\therefore A'$ம் A'ம் ஒரே புள்ளியாகும்.

A யின் சோடி A' எனும் புள்ளியே ஆகவே AA', BB' CC' என்பவை ஒரே அடுக்குப் புள்ளி வரிசையில் அமைகின்றன.

5·28. முழு நாற்கோணத்தின் அடுக்குப் புள்ளி வரிசை (Involution Property of the Complete quadrangle)



படம், 15

$PQRS$ என்பது நாற்கோணம் ; XYZ அதன் மூலைமுக்கோணம். ஒரு கோடு l, நாற்கோணத்தின் பக்கங்கள் PQ, RS, PR, QS, PS, QR

இவற்றை முறையே AA; BB'; CC' எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். (AA'), (BB'), (CC'), அடுக்குப்புள்ளிவரிசையில் அமைகின்றன என்று நிரூபிப்போம்.

$$
\begin{aligned}
(AB,\ CC') &= P(AB,CC') \\
&= (QR,ZC') \quad (QR \text{ ல் வரிசை எடுக்க}) \\
&= S(QR,ZC') \\
&= (B'A',CC') \quad (l \text{ ல் வரிசை எடுக்க}) \\
&\quad (A'B'CC')
\end{aligned}
$$

[இரண்டிரண்டாக வரிசை மாற்ற குறுக்குவீதம் மாறுது.]

∴ AA'; BB'; CC' அடுக்குப்புள்ளி வரிசையில் அமைகின்றன,

5·29. அடுக்குப் புள்ளிவரிசையில் ஆறுவது புள்ளியை அமைக்க

மேற்கூறிய தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி AA'; BB'; நிச்சயிக்கும் அடுக்குப்புள்ளி வரிசையில் C யின் சோடிப்புள்ளி C'ஐக் காணலாம்.

காணும் முறை; ஒரு கோட்டில் AA'; BB'; e என ஐந்து புள்ளிகள் தரப்பட்டுள்ளன. AA' எனும் கோட்டிற்கு வெளியே P எனும் புள்ளியைக்கொள்க. B' வழி B' QS எனும் கோடு வரைக. அது PBயை Aயிலும் Peஐ Sலும் வெட்டட்டும். PB,SA' எனும் கோடுகள் Rல் வெட்டட்டும். AR எனும் கோடு AA' ஐ C'ல் வெட்டட்டும். அப்போது மேற்கூறிய தேற்றத்தின்படி $PQRS$ நாற்கோணமாவதால் AA'; BB'; CC'; ஒரே அடுக்குப்புள்ளி வரிசையில் அமைகின்றன.

5·30. அடுக்குப் புள்ளி வரிசையின் இயற்கணித முறைக் குறியீடு (An algebraic representation of an involution)

ஒரு கோட்டில் AA; BB' இரு சோடிப்புள்ளிகள் அதே கோட்டில் உள்ள o, vz எனும் இருபுள்ளிகளை ஆதாரப் புள்ளிகளாகக் கொள்க.

அப்போது $\quad A=0+\alpha v \qquad B=0+\beta v$

$\qquad\qquad A'=0+\alpha' v \qquad B'=0+\beta' v$ ஆகுக.

α,α' எனும் மூலங்களையுடைய இருபடிச்சமன்பாடு $ax^2+2hx+b=0$ ஆகுக. β,β' எனும் மூலங்களையுடைய இருபடிச்சமன்பாடு

$$a'x^2+2h'x+b'=0 \text{ ஆகுக.}$$

$$(AA', BB') = -1 \text{ என்றால்}$$

$$(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta') + (\alpha-\beta')(\alpha'-\beta) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது $2(\alpha\alpha' + \beta\beta') = (\alpha+\alpha')(\beta+\beta')$

$$\text{ஆனால் } \alpha\alpha' = \frac{b}{a} \qquad \alpha+\alpha' = \frac{-2h'}{a}$$

$$\beta\beta' = \frac{b'}{a'}, \qquad \beta+\beta' = \frac{-2h'}{a'}$$

$$\therefore (ab'+a'b) = 2hh'$$

$$\text{அல்லது } (ab'+a'b) - 2hh' = 0$$

இதுவே $(AA'; BB') = -1$ ஆக இருக்க உள்ள நியதி:

5·31. தேற்றம்: $ax^2+2hx+b=0$, $a\ x^2+2h'x+b^1=0$ எனும் இரண்டு இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் தரும் புள்ளிகள் முறையே AA', BB' ஆகுக. அவை தரும் அடுக்குப்புள்ளி வரிசையில் உள்ள சோடிப்புள்ளிகளை $(ax^2+2hx+b) + \lambda(a'x^2 + 2h'x+b') = 0$ எனும் சமன்பாடு(λன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கு) அதன் மூலங்களால் தரும்.

நிரூபணம் $(ax^2+2hx+b)+\lambda(a'x^2+2h'x+b')=0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு γ எனும் ஒரு மூலம் வருமாறு λன் மதிப்பைக் கொள்க. λன் மதிப்பு $= -\dfrac{(a\gamma^2 + 2h\gamma + b)}{(a'\gamma^2+2h'\gamma + b')}$ எனத் திட்டமான ஒரே மதிப்பாக வரும். λக்கு இந்த மதிப்பைக் கொடுக்க, சமன்பாட்டின் இரண்டாவது மூலம் γ'ம் திட்டமாக வரும். இதே போல γ' என்பதை மூலமாகக் கொண்டால் λக்கு முன்கூறிய மதிப்பே வரும். மற்ற மூலம் γ ஆகவரும். இவ்வாறு γ'க்கு γ'எனவும் γ'க்கு γ எனவும் இவ்வாறு(γ, γ') எனும் சோடி எண்கள் λவின் ஒரே மதிப்புக்கு வருவதால், அவை தரும் புள்ளிகள் அடுக்குப் புள்ளி வரிசையில் வரும். $(\gamma, \gamma''$ இடை ஒன்றற்கொன்றே எனும் இரு புறமும் உள்ள தொடர்பு இருப்பதால் Biunivocal Correspondence) அவை தரும் புள்ளிகள் அடுக்குப் புள்ளி வரிசையில் அமையும்; $\lambda=0$ எனும்போது AA'ம், $\lambda=\infty$ எனும்போது BB'ம் வருவதால் λன் மற்ற மதிப்புக்களுக்கு வரும் சோடிப் புள்ளிகள் AA'; BB' தரும் அடுக்குப் புள்ளி வரிசையில் அமையும்.

தேற்றம்: $(ax^2+2hx+b) + \lambda(a'x^2+2h'x+b')=0$ எனும் சமன்பாட்டு மூலங்கள் (λன் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்கு) தரும் அடுக்குத் தொடரின் ஒன்றுசேர் புள்ளிகள் λவின் λ_1, λ_2 எனும் மதிப்புக்களால் தரப்படட்டும். $\lambda=\lambda'$; $\lambda=\lambda''$ எனும் மதிப்புக்கள்

$AA'; BB'$ எனும் சோடிப்புள்ளிகளைத் தரட்டும். என்றால் $(AA'; BB') = -1$ ஆக $(\lambda'\lambda', \lambda\lambda_2) = -1$ ஆக வேண்டும்.

நிரூபணம்

$(\lambda\lambda', \lambda, \lambda_2)$ எனும் குறுக்குவீதத்தின் மாறுத்தன்மையால் $\lambda' = 0$ எனும் போதுள்ள AA' ஐம் $\lambda' = \infty$ எனும் போதுள்ள (BB') எனும் சோடிப்புள்ளிகளைக் கொள்வோம். அப்போது AA' எனும் புள்ளிகள் $ax^2 + 2hx + b = 0$ எனும் சமன்பாடாலும் BB' எனும் புள்ளிகள்

$a'x^2 + 2h'x + b' = 0$ எனும் சமன்பாட்டாலும் தரப்படும். இவை இசைப்பிரிவுப் புள்ளிகளாகும்.

$$ab' + a'b - 2hh' = 0$$

(ii) $(ax^2 + 2hx + b) + \lambda) (a'x^2 + 2h'x + b') = 0$ தரும் அடுக்குத் தொடரின் ஒன்றுசேர் புள்ளிகள் சமன்பாடு மூலங்கள் பொருந்து மூலங்களானல் வரும். அவ்வாருயின்

$(a + \lambda a')(b + \lambda b') - (h + \lambda h')^2 = 0$ ஆக வேண்டும்.

$\therefore (a'b' - h'^2) + (a'b + ab' + 2hh')\lambda + (ab - h^2) = 0$ ஆகும்.

இதன் மூலங்கள் $\lambda_1 \; \lambda_2$ என்ருல் அவைதரும் புள்ளிகள் ஒன்றுசேர் புள்ளிகளாகும்.

ஆனல் $a'b + a'R - 2hh' = 0$ ஆனதால் $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

$$(\lambda'\lambda', \lambda_1\lambda_2) = (o\infty; \lambda_1\lambda_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$$

எனக் காண்கிருேம்.

மறுதலையாக $(\lambda'\lambda'', \lambda_1\lambda_2) \; -1$ என்ருல் $AA'; BB'$ எனும் சோடிப்புள்ளிகள் ஒன்று மற்றதன் இசைப்பிரிவுப் புள்ளிகளாகும்.

அடுக்குக் கோட்டுக்கற்றை (Pencils in involution)

(i) அடுக்குப்புள்ளி வரிசையின் இருபான்மை அடுக்குக் கோட்டுக்கற்றை.

(ii) ஒரு அடுக்குக்கற்றையில் இரு 'ஒன்றுசேர்' கோடுகள் உள்ளன.

(iii) ஒரு சோடிக்கோடுகளும், இரு 'ஒன்றுசேர்' கோடுகளும் ஒன்றற்கொன்று இசைப்பிரிவுக் கோடுகளாகும்.

(iv) இசைக்கோட்டுக்கற்றை ஒரு குறுக்கு வெட்டியின்மேல் இசைப்புள்ளி வரிசை ஏற்படுத்துவதால் அடுக்குக் கோட்டுக் கற்றையின் சோடிக்கோடுகள் எந்தக்கோட்டையும் அடுக்குவரிசையில் உள்ள சோடிப்புள்ளிகளில் வெட்டும்.

(v) ஒரு முழு நாற்கரத்தின் மூன்றுசோடி எதிர்முனைகள் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியுடன் சேர்க்கும் மூன்றுசோடிக் கோடுகள், ஒரே அடுக்குக்கற்றையின் சோடிக் கோடுகளாகும். இவ்வாறு இருபான்மையாக அடுக்குப்புள்ளி வரிசையில் கூறிய ஒவ்வொன்றுக்கும் கூறலாம்.

6. இருபடி வரை
Conic

ஒரு நேர்க் கூருளையின் தள வெட்டு முகமாக (plane section) கூம்பு வெட்டு என்று சொல்லப்படும் இருபடி வரையைப் பற்றிப் பண்டை கிரேக்கர்கள் (430 B. C) ஆராய்ந்தார்கள் எனக் கணித சரித்திரம் கூறுகிறது. பகு முறை வரை கணிதத்தில் அதனை குவியம்— இயக்கு வரைப் (Focus directrix) பண்பினால் வரையறுத்துப் பல்வேறு பண்புகள் காணப்பட்டன. இங்கு 'அமைவுத் தேற்றங்களின்' அடிப்படையில் வரை கணிதத்தை வகுப்பதால், அதனை 'தொடர்புடைய கோட்டுக் கற்றை' தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசை இவற்றின் மூலம் வரையறுத்து பல தேற்றங்களைக் காண்போம். இனிமேல் தளத்தில் உள்ள புள்ளி கோடு இவைகளைப் பற்றியே கூறப்போகிறோம்.

6·1. இருபடி வரையின் வரையறை: இரு வெவ்வேறு முனைகளில் அமையும் தொடர்புடைக் கோட்டுக் கற்றைகளின் ஒத்த கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் கொண்ட கணம் (**set of points of intersections**) இருபடி வரை எனப்படும்.

$A\,(a, b, c, d \ldots) = A', (a', b', c', d' \ldots)$ என்பன இரு தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசைகள் என்றால் $a\,a'$; b, b', c, c' என வெட்டும் புள்ளிகள் கொண்ட வரை இருபடி வரையாகும்.

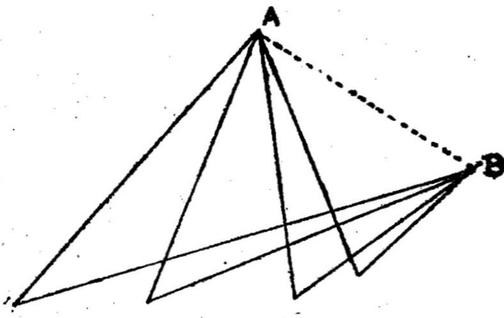
6·2. இருபடி வரையை ஒரு கோடு இரண்டு புள்ளிகளில் மட்டுமே வெட்டும்

இரண்டு தொடர்புடைக் கோட்டுக் கற்றைகளின் முனைகள் A, B ஆகுக. l எனும் கோடு கோட்டுக் கற்றைகளின் PP', QQ', ... எனும் புள்ள வரிசையில் வெட்டட்டும். $(PQ \ldots)$, $(P'Q' \ldots)$ எனும் புள்ளி வரிசைகள் தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசைகள். இவற்றின் ஒன்றுசேர் புள்ளிகள் E, F ஆகுக. அப்போது AE, BE; என்பவை

கோட்டுக் கற்றைகளின் ஒத்த கோடுகள் அவை வெட்டும் புள்ளி E, கோட்டுக் கற்றைகள் தரும் இருபடி வரையில் உள்ளது. இது போன்றே F எனும் புள்ளியும், ∴ கோட்டிற்கும் இருபடி வரைக்கும் பொதுவாகப் (அதாவது இரண்டும் வெட்டிக்கொள்ளும்) புள்ளிகள் இரண்டே உள்ளன.

6·3. இருபடி வரை கோட்டுக் கற்றைகளின் முனைகள் வழிச்செல்லும்

A, B எனும் புள்ளிகள் தொடர்புடைக் கோட்டுக் கற்றைகளின் முனைகள் ஆகுக.



படம். 16

AB என்பது முதல் கற்றையின் ஒரு கோடாகும். இதற்கு ஒத்த கோடு இரண்டாவது கற்றையில் B வழிச் செல்லுவதால், B என்பது ஒத்த கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியாகும். ∴ இருபடி. வரையின் வரையறைப்படி B, அந்த வரையில் இருக்க வேண்டும் அதே போல A வழியுள்ள ஒரு கோட்டின் ஒத்த கோடாக BA அமைய வேண்டும். A யும் இருபடி வரையில் அமையவேண்டும்.

6·4. இருபடி வரையின் தொடு கோடு

A வழியுள்ள கோடு இருபடி வரையை A யிலும், இன்னொரு புள்ளி P யிலும் வெட்டுகிறது. அப்போது AP யின் ஒத்த கோடு மற்ற கோட்டுக் கற்றையில் BP ஆகும் P யானது A யுடன் பொருந்தினல், AP எனும் கோடு — அதாவது AA — இரு படி வரையின் A யில் உள்ள தொடு கோடு எனப்படும். ஆகவே A யில் உள்ள தொடு கோடு இரண்டாவது கற்றையில் உள்ள BA எனும் கோட்டின் ஒத்த கோடெனத் தெரிகிறது. இதே போல AB யின் ஒத்த கோடு (இரண்டாவது கற்றையில்) இருபடி வரைக்கு B யில் உள்ள தொடு கோடாகும்.

6·5: சிதைந்த இருபடி வரை

A; *B* என்ற முனைகளில் உள்ள இரு தொடர்புடைக் கோட்டுக் கற்றைகளில், சிறப்பாக *AB* என்ற கோட்டின் ஒத்த கோடு *BA* ஆக வந்தால் என்ன நேரிடுகின்றது என்பதைப் பார்ப்போம். [*AB* எனும் கோட்டிற்கு *B* வழி வேறு ஏதாவது ஒத்த கோடு வந்தால் இரண்டும் *B* யில் வெட்டுகின்றன. *B* இருபடி வரையில் உள்ளது என்றோம். இங்கே ஒத்த கோடு *BA* ஆனதால் கோட்டில் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளும் பொதுப் புள்ளிகள்தாம். இவை இருபடி வரையில் உள்ளவையா எனப் பார்க்க வேண்டும்.] *AP*, *BP*; *AQ*, *BQ* எனும் ஒத்த கோடுகள் *P*, *Q* வில் வெட்டட்டும். *AB* யும் *PQ* வும் *R* எனும் புள்ளியில் சந்திக்கட்டும்.

ஆகவே *PQ* எனும் கோடுகளில் இரண்டு தொடர்புடைக் கோட்டுக் கற்றைகள் தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசைகளை ஏற்படுத்துகின்றன. அதில் *P*, *Q*, *R* எனும் மூன்று புள்ளிகள் ஒன்று சேர் புள்ளிகள் (United points or Double points) ஆகின்றன. இரண்டு ஒன்று சேர் புள்ளிகளுக்கு அதிகமாக மூன்று புள்ளிகள் இருப்பதால் கோட்டில் உள்ள புள்ளி வரிசையில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி வரிசையும் ஒன்றுசேர் புள்ளியாகும். ஆகையால் 'ஒத்த கோடுகள்' வெட்டும் புள்ளிகள் யாவும் *PQ* எனும் கோட்டில் உள்ளன. ஆகவே *PQ* எனும் கோடு இருபடி வரையைச் சார்ந்ததாகும்.

அல்லாமலும் *AB*யில் உள்ள எந்தப்புள்ளி *X* ஐயும் *AB* யுடன் சேர்த்தால் வரும் *AX*, *BX* எனும் கோடுகள் ஒத்தகோடுகள். ∴ *X* எனும் புள்ளி இருபடி வரையில் அமைய வேண்டும். ஆகவே *AB* யில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் இருபடி வரையைச் சார்ந்ததாகும். இவ்வாறு இருபடிவரை *AB*, *PQ* என இரு கோடுகளாகச் சிதைகிறது. ஆகவே இரண்டு கோடுகளில் உள்ள புள்ளிகளும் சிதைந்த இருபடி வரையைச் சார்ந்தது எனக் கூறலாம்.

6·6. ஒருகோடு ஒருவரையை இரண்டே புள்ளிகளில் வெட்டினால் அது இருபடி வரையாகும்

இதன் மறுதலையை நிறுவினோம். அதாவது இருபடி வரையை (வரையறுத்தபடியுள்ள இருபடி வரை) இரண்டே புள்ளிகளில் வெட்டும் எனக் கண்டோம். ஏதாவது ஒருவரையை ஒரு கோடு இரண்டு புள்ளிகளில் மட்டும் வெட்டினால் அது வரையறைக்குட்பட்ட இருபடி வரையாகும் என்பதை நிலைநாட்டுவோம்.

AB அந்தவரையில், ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளாகுக. *A* வழி உள்ள ஒரு கோடு மீண்டும் வரையை மற்றொரு புள்ளியில்-

P-யில் என்போம் — வெட்டும். (கொள்கைப்படி). BP - ஐச் சேர்க்கவும். AP, BP எனும் கோடுகள் (1—1) எனும் தொடர் புடையதாய்க் காண்கிறோம். ஆகவே AP, BP என்பவை தொடர்புடைக் கோட்டுக்கற்றையின் ஒத்தகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியாகும். இவ்வாறே வரையில் உள்ள ஏனைய புள்ளிகளும். ஆதலால் வரை இருபடி வரை (conic by definition) யாகிறது.

6·7. ஐந்து புள்ளிகள் ஒரு இருபடி வரையை நிச்சயிக் கிறது

அதாவது ஐந்து புள்ளிகள் தரப்பட்டால்-நான்கு புள்ளிகள் ஒரு கோடமையாமல்-அவைவழி ஒரே ஒரு இருபடி வரையுள்ளது என்பதை நிறுவுவோம்.

A, B, C, D, E என்பவை 5 புள்ளிகள்.

AC, AD, AE, BC, BD, BE, எனும் மூன்று சோடி ஒத்த கோடுகள் தொடர்புடைக் கோட்டுக்கற்றையை நிச்சயிக்கும். A, B என்ற புள்ளிகளும் ஒத்தகோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகளாகிய C, D, E என்பவையும் இருபடி வரையைச் சேர்ந்ததெனக் கூறினோம். ஒரே தொடர்புடைக்கற்றையாதலால் $A\,B\,C\,D\,E$ வழி ஒரே இருபடி வரை அமையும்.

6·8. இருபடி வரையின் குறுக்குவிகிதப் பண்பு (Cross ratio Property of the Conic)

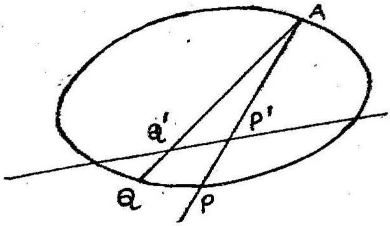
ஆறு புள்ளிகள் A, B, C, D, E, F பொதுவாக ஒரு இருபடி வரையின் மேல் அமைய வேண்டிய தேவையில்லை. முதல் ஐந்து புள்ளிவழியுள்ள ஒரே இருபடிவரை ஆறுவது வழிச் செல்லும் என்று கூறமுடியாது. ஆனால் ஆறுவது புள்ளியும் அந்தவரையில் அமைந்தால் AC, AD, AE, AF எனும் நான்கு கோடுகளும் BC, BD BE, BF எனும் நான்கு கோடுகளும் தொடர்புடை இருகோட்டுக் கற்றைகளின் ஒத்த கோடுகளாகும். அவற்றின் குறுக்கு விகிதப் பண்பையொட்டி $A\,(CD, EE) = B\,(CD, EF)$ என வருகிறது.

C, D, E, F எனும் நான்கு புள்ளிகளை நிலையாகக்கொண்டு, AB யின் நிலைகளை இருபடிவரையில் மாற்றினால் கீழ்வரும் தேற்றம் புலனாகிறது.

இருபடிவரையில் உள்ள நான்கு புள்ளிகளை, வரையின்மேல் எந்த புள்ளியுடனும் சேர்க்கவரும் கோட்டுக்கற்றையின் குறுக்கு விகிதம் ஒன்றாகவே (சமமாகவே) இருக்கும்.

6·9. இருபடி வரையின் மீது "தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசை"

இருபடி வரையின் மீது A எனும் புள்ளியைக் கொள்க. A வழிச் செல்லாத l எனும் கோட்டையும் கொள்க. A வழியுள்ள ஒரு கோடு இருபடி வரையை P யிலும், l எனும் கோட்டை P' லும் வெட்டட்டும். அப்போது (P, P') இடை $(1-1)$ தொடர்புள்ளதைக் காண்கிறோம்,



படம். 17

l எனும் கோட்டில் (P', Q') என்பவற்றை ஒத்த புள்ளிகளாகக் கொண்ட இரு தொடர்புடை வரிசையைக்கொள்ளவும். AQ', இருபடி வரையை Qவில் வெட்டட்டும். (P', Q') தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசை அப்போது (AP, AQ). தொடர்புடைக் கோட்டுக்கற்றை $(PQ,)$ இருபடி வரையில் $(P'Q')$ க்கேற்றபடி மாறும்போது இருபடி வரையில் தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசையாக அமைகிறதெனப்படும்.

P யின் மூன்று நிலைகளும் அதற்கொத்த Q வின் மூன்று நிலைகளும் தரப்பட்டால், இத்தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசை நிச்சயிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு: மேற்கூறியபடி A க்கு ஏற்ற $(P_1 P_2 P_3 \dots)$ $(Q_1 Q_2 Q_3 \dots)$ எனும் தொடர் புடைப்புள்ளி வரிசையை, இருபடி வரையில் கொள்வோம். B இருபடி வரையில் வேறொருபுள்ளியாகுக. "நான்கு புள்ளிகள் இருபடி வரையில் எல்லாப் புள்ளிகளும் ஒரே குறுக்கு விகிதமுள்ள கோட்டுக் கற்றையை ஏற்படுத்தும்" எனும் தேற்றப்படி $A(P_1 P_2, P_3 P_4) = B(P \;\; P_2, P_3 P_4)$.

$$\text{இதே போல } A(Q_1 Q_2, Q_3 Q_4) = B(Q_1 Q_2, Q_3 Q_4)$$

$$\therefore \quad B(P_1 P_2, P_3 P_4) = B(Q_1 Q_2, Q_3 Q_4)$$

ஆகவே $(BP_1 \, BP_2 \, BP_3 \, BP_4 \dots)$, $(BQ_1 \, BQ_2 \, BQ_3 \, BQ_4 \dots)$ என்பவையும் தொடர்புடைக் கோட்டுக்கற்றைகளாகும்.

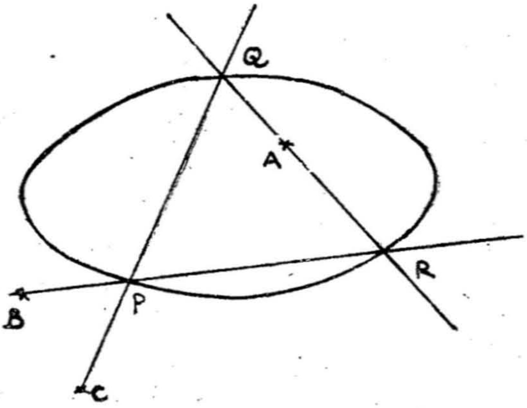
இதனைத் தேற்றமாகக் கூறுவோம்.

ஒரு இருபடிவரையில் இருதொடர்புடை வரிசையின் புள்ளிகளை, அவ்வரையின்மீதுள்ள எந்தப் புள்ளியுடனும் கோடுகளால் சேர்த்தாலும் வரும் கோட்டுக்கற்றைகள் தொடர்புடைக்கற்றைகளாகும்.

6·10. கணக்கு: **ஒரு இருபடிவரையில் முனைகளைக்கொண்டதாகவும், மூன்று குறிப்பிட்ட புள்ளிகள் வழிப்பக்கங்கள் செல்பனவாகவும் அமையும் முக்கோணங்கள் இரண்டே உள்ளன எனக் காண்க.**

ABC குறிப்பிட்ட புள்ளிகளாகுக.

A வழிச்செல்லும் ஒரு கோடு இருபடிவரையை *QR* எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும், *BR, CQ* வரையை மீண்டும் *P, P* எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். *A* வழிப் பல்வேறு கோடுகளுக்கு *P, P'*–எனும் புள்ளிகள் *(1—1)* எனும் தொடர்புடையன.

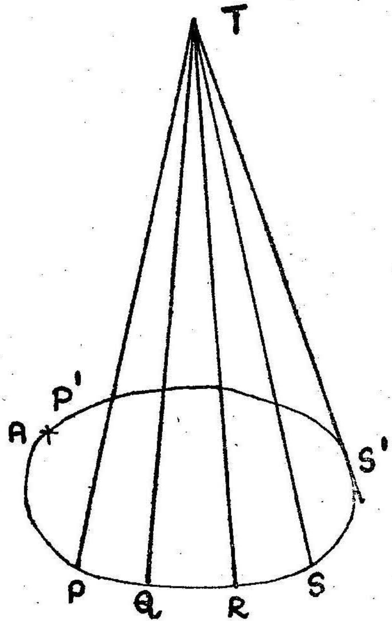


படம். 18

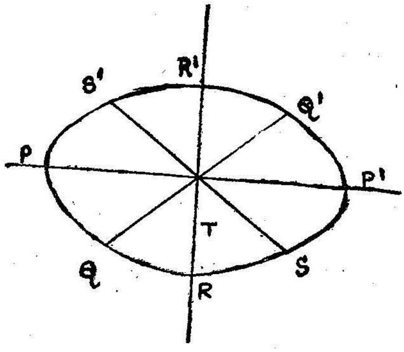
ஆகவே இருபடிவரையில் தொடர்புடை வரிசைகளை ஏற்படுத்துகின்றன. ஒன்றுசேர் புள்ளிகள் *M, N* ஆகுக. அப்போது *B, C* வழி ஒத்தகோடுகள் *M* ல் சந்திக்கும். அதற்கேற்பவுள்ள *PQR* எனும் முக்கோணம் முனைகளை வரையில் கொண்டதாகவும் பக்கங்கள் *A, B, C* செல்பனவாகவும் அமைகிறது. அதுபோலவே *N* எனும் புள்ளியை முனையாகக் கொண்ட முக்கோணமும்.

6·11. இருபடி வரையில் அடுக்குப் புள்ளி வரிசை *(Involution range on a Conic)*

விளக்கம்: இருபடி வரையில் அமையும் இருபுள்ளிவரிசைகளில் உள்ள புள்ளிகளை, வரையின் மேல் உள்ள ஏதேனும் புள்ளியுடன் சேர்க்க வரும் கோட்டுக்கற்றைகள் அடுக்குக் கோட்டுக் கற்றையானால், அந்தப் புள்ளி வரிசைகள், **இருபடி வரையின் மீதுள்ள அடுக்குப் புள்ளி வரிசை எனப்படும்.**



படம். 19



படம். 20

தேற்றம் : ஒரு புள்ளி வழி இருபடி வரைக்குள்ள நாண்கள், இருபடி வரையை அடுக்குப்புள்ளி வரிசையில் அமையும் சோடிப் புள்ளிகளில் வெட்டும்.

A என்பது இருபடி வரையில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியாகுக. T எனும் ஏதாவது புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு இருபடி வரையை P, P' ல் வெட்டட்டும். இவ்வாறு PP' ஐப் போன்ற T வழிப் பல நாண்கள் $QQ', RR'; SS'$... வரையலாம். AP எனும் கோட்டிற்கு ஒத்த கோடு AP' ஒன்றே, AP' எனும் கோட்டிற்கு ஒத்த கோடு AP யே ஆகும். இது போன்றே AQ, AQ'; AR, AR'; AS, AS' : போன்ற சோடிக் கோடுகளும். ஆகவே இவை அடுக்குக் கோட்டுக் கற்றைகளாகும். அதனால் PP'; QQ'; RR'; SS' என்பவை இருபடி வரையில் உள்ள அடுக்குப் புள்ளி வரிசையாகும்.

6·12. இந்த அடுக்குப்புள்ளி வரிசையின் ஒன்றுசேர் கோடுகள்

அடுக்குக் கோட்டுக் கற்றையில் இரண்டு ஒன்றுசேர் கோடுகள் உள்ளன. அதற்கேற்ப இருபடியில் அமையும் அடுக்குப் புள்ளி வரிசையில் இரண்டு வெவ்வேறு ஒன்று சேர் புள்ளிகள் உள்ளன. அவை E, F ஆகுக ; அதாவது E, E' எனும் சோடிப்

புள்ளிகளில் E', E யுடன் பொருந்துகிறது. அப்போது T வழி உள்ள கோடு இருபடி வரையப் பொருந்தும் புள்ளிகளில் வெட்டு கிறது. அதாவது TE இருபடி வரைக்குத் தொடுகோடாகிறது. இது போலவே TF ம். ஆகவே ஒரு புள்ளி வழி இருபடி வரைக்கு இரண்டு கோடுகள் மட்டுமே உள்ளன என நிறுவுகிறோம்.

தேற்றம்: **இருபடி வரையில் அமையும் அடுக்குப் புள்ளி வரிசையின் சோடிப் புள்ளிகள் வழி உள்ள நாண்கள், ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளாகும்.**

PP', QQ' என்பவை இரண்டு சோடிப் புள்ளிகளாகுக. PP', QQ' வெட்டும்புள்ளி T ஆகுக. T வழியுள்ள நாண்களால் இருபடி வரையில் ஏற்படும் அடுக்குப்புள்ளி வரிசையின் இரண்டு சோடிப் புள்ளிகள் (P, P'), (QQ') ஆகும். ஆனால் இரண்டு சோடிப்புள்ளி கள் ஒரே அடுக்குப்புள்ளி வரிசை நிச்சயிப்பதால் (PP') (QQ') உள்ள அடுக்குப்புள்ளி வரிசையும், T வழி நாண்கள் ஏற்படுத்தும் அடுக்குப்புள்ளி வரிசையும் சர்வ சமம். ஆகவே, மற்ற சோடிப் புள்ளிகள் வழியுள்ள நாண்களும் T வழிச் செல்பவனவாகும்.

6·13. இருபடிவரையைத் தழுவு வரையாகக் கருதல் (The Conic as an envelope)

இந்த வீழல் வரைகணிதத்தில் தளத்தில், புள்ளியின் இரு பான்மை உருப்படி கோடு எனவும், கோட்டின் இருபான்மை புள்ளி எனவும் கூறியுள்ளோம். சில நியதிகட்கு உட்படும் புள்ளிக் கணத்தை புள்ளியின் இயங்குவரை (Iocus of the point) என் கிறோம். அதேபோல நியதிகட்குட்பட்ட கோடுகள் தொடும் வரை யை தழுவுவரை (envelope) என்போம். இருபடி வரையைப்புள்ளி வரையாகக் (Point Conic) கூறியுள்ளோம். வெவ்வேறு முனை களில் அமையும் இருதொடர்புடைக் கோட்டுக் கற்றைகளின் ஒத்தகோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் கொண்ட புள்ளியமை வரை புள்ளி—இருபடிவரை (Point Conic) என்போம். இதன் இரு பான்மை, இரண்டு வெவ்வேறு கோடுகளில் அமையும் தொடர் புடைப்புள்ளி வரிசைகளில் ஒத்த புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு கள் தழுவும்வரை—இருபடிவரையாகும். இதை, கோட்டு—இரு படிவரை (Line Conic) என்போம்.

புள்ளி இருபடிவரையை (Point Conic) ஒரு கோடு இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டும் என்றோம். எந்த வரை ஒரு கோட்டால் இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டப்படுகிறதோ அது (புள்ளி) இருபடி வரை எனவும் காட்டினோம்.

இதன் இருபான்மை, கோட்டு— இருபடிவரைக்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரண்டு தொடுகோடுகள் உண்டெனவும், இவ்வாறு ஏதேனும் புள்ளியிலிருந்து ஒருவரைக்கு இரண்டு தொடுகோடுகளேயானல் அது (கோட்டு) இருபடிவரை எனவும் ஆகும்.

(புள்ளி) இருபடி வரைக்கு அதன்மேல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஒரு தொடு கோடு உண்டு எனக் காட்டியுள்ளோம். ஆகவே இந்தத் தொடு கோடுகள் தழுவும் வரையே (புள்ளி) இருபடி வரை.

இருபான்மையான (கோட்டு) இருபடி வரைக்கு ஒவ்வொரு தொடுகோட்டிற்கும் வரையில் ஒரு புள்ளி உளது. இதனைத் தொடு புள்ளி என்போம். ஆகவே இந்தத் தொடு புள்ளிகள் கொண்ட வரையே (கோட்டு) இருபடி வரை.

இவ்வாருக இருபடி வரை ஒரே சமயத்தில் புள்ளி வரையாகவும் (Point Conic), கோட்டு வரையாகவும் விளங்குகிறது. (புள்ளி) இருபடி வரையின் தொடு கோடுகள், (கோட்டு) வரையின் கோடுகளாம். (கோட்டு) இருபடி வரையின் தொடும்புள்ளிகள், (புள்ளி) இருபடி வரையின் புள்ளிகளாகும். எனவே (புள்ளி) இருபடி வரையும் (கோட்டு) இருபடி வரையும் தனக்குத்தானே இருபான்மை உருப்படிகள் (self dual elements) ஆகின்றன. எனவே (புள்ளி) இருபடி வரை, (கோடனை) இருபடி வரை எனக் கூருமல் இருபடி வரை என்றே இனிமேல் கூறுவோம்.

குறிப்பு 1. (புள்ளி) இருபடிவரை, இரண்டு கோடுகளாகச் சிதைகின்றன என்ரேம். இதன் இருபான்மை, (கோட்டு) இருபடி வரை இரண்டு புள்ளிகளாகச் சிதைகின்றன என்பதாம்.

குறிப்பு 2. 'ஐந்து புள்ளிகள் ஒரு இருபடிவரையை நிச்சயிக்கின்றன' என்பதன் இருபான்மை 'ஐந்து கோடுகள்' ஒரு இருபடி வரையை நிச்சயிக்கின்றன. அதாவது 5 கோடுகளைத் தொடு கோடுகளாகவுடைய இருபடிவரை ஒன்றே உள்ளது.

6·14. தேற்றம்

ஒரு இருபடி வரையில் உள்ள நான்கு குறிப்பிட்ட புள்ளிகளை, அதன் மேலுள்ள எந்தப் புள்ளியுடன் சேர்க்கும் நான்கு கோடுகள் கொண்ட கற்றையின் குறுக்கு விகிதம் ஒன்ருகவே இருக்கும். அந்த நான்கு புள்ளிகளில் உள்ள தொடுகோடுகள், வேறு தொடு கோட்டில் ஏற்படுத்தும் புள்ளிவரிசையின் குறுக்கு விகிதத்திற்கு அது சமமாகும்.

இருபடி வரையின் மேல் A ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியாகுக. t ஒரு குறிப்பிட்ட தொடுகோடாகுக. P என்பது வரையின்மேல் மாறும் புள்ளியாகுக. P யில் உள்ள தொடுகோடு, t ஐ P' ல் வெட்டட்டும். A வழியுள்ள AP எனும் கோட்டிற்கும், t-மேல் வரும் P' எனும் புள்ளிக்கும் $(1-1)$ எனும் தொடர்பிருப்பதைக் காண்கிறோம். ஏனெனில் P புள்ளியானல் AP ஒரே கோடு ; Pயில் ஒரே தொடு கோடு. அது t-ஐ ஒரே புள்ளி P' யில் வெட்டும்.

அதனுல் AP க்கும் P' க்கும் $(1-1)$ தொடர்பு இருப்பதைக் காணலாம். மறுதலையாக t ல் உள்ள P' எனும் புள்ளியிலிருந்து t ஐத் தவிர இன்னெரு தொடுகோடே யுள்ளது. அது இருபடி வரையில் P ல் தொட்டால் AP எனும் ஒரே கோடு வருகிறது.

ஆகவே $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$ என்பவை இருபடிவரையில் நான்கு புள்ளிகளானுல், $P_1'\ P_2'\ P_3'\ P_4'$ t ல் உள்ள அவற்றிற்கொத்த புள்ளிகளானுல் இந்த $(1-1)$ தொடர்பால் $A\,(P_1\ P_2\,.\,P_3\ P_4) = t\,(P_1'\ P_2',\ P_3'\ P_4')$ என வருகிறது.

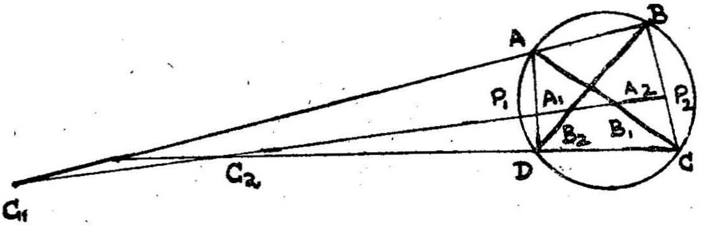
$(P_1\ P_2\ ,\ P_3\ P_4)$ எனும் நான்கு புள்ளிகளை இருபடிவரையில் வேறெரு புள்ளியுடன் சேர்க்கவரும் கோட்டுக்கற்றையின் விகிதமும் இதற்குச் சமம் என முன்னரே கண்டுள்ளோம். ஆதலால் குறுக்கு விகிதம் 't'-ஐப் போன்ற எல்லாத் தொடுகோடுகளுக்கும் ஒன்றே. இவ்வாறு தேற்றத்தின் உண்மை நிறுவப்படுகிறது.

6·15. இருபடி வரையின் 'தேசரர்குத்' தேற்றம் (Desargues' Theorem on Conic)

நான்கு புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் இருபடி வரைகள், ஒரு கோட்டை, அடுக்குப் புள்ளி வரிசையில் உள்ள சோடிப் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன.

$ABCD$ நான்கு புள்ளிகள். அவற்றில் எந்த மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் அமையாதவை. l என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட கோடு, அதில் P எனும் புள்ளியைக் கொள்க. A,B,C,D,P எனும் 5 புள்ளிகள் வழி ஒரே ஒரு படி வரை உள்ளது. அது l-ஐ P' ல் வெட்டட்டும். அப்போது P க்கு என ஒரே புள்ளி P' உள்ளது கோட்டில் P ஐக் கொண்டால் $ABCDP'$ வழியுள்ள இருபடி வரை A, B, C, D, P வழியுள்ள இருபடி வரையே. ஆகையால் அது P ல் வெட்டும், P க்கு ஏற்றபுள்ளி P', P_1 க்கு ஏற்ற புள்ளி P எனும் $(1-1)$ தொடர்பு வருவதால் (P', P) கோட்டில் அடுக்குப் புள்ளி வரிசையை ஏற்படுத்துகிறது. அதாவது $ABCD$ வழியுள்ள இருபடி வரைகள் l எனும் கோட்டை அடுக்குப்புள்ளி வரிசையில் உள்ள சோடிப் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன.

[மாற்று வழி :



படம். 21

l எனும் கோடு BC, AD; CA, BD; AB, CD; இவற்றை $A_1 A_2$; $B_1 B_2$; $C_1 C_2$ விலும் இருபடி வரையை $P_1 P_2$ விலும் வெட்டட்டும்.
$C(P_1\ P_2, AB) = D(P_1 P_2, AB)$

[இருபடி வரையின் குறுக்கு விகிதப்பண்பு]

$$\therefore\ \{P_1\ P_2, B, A\} = \{P_1\ P_2\ A_2\ B_2\} = \{P_2\ P_1\ B_2\ A_2\}$$

$\because$ $A_1\ A_2, B_1\ B_2, P_1 P_2$ என்பவை ஒரே அடுக்குப்புள்ளி வரிசையின் சோடிப்புள்ளிகள். $\therefore$ $A_1 A_2, B_1 B_2$ நிச்சயிக்கும் அடுக்குப்புள்ளி வரிசையில் எந்த இருபடி வரையாயினும் $P_1 P_2$ போன்ற சோடிப்புள்ளிகள் அமைகின்றன.

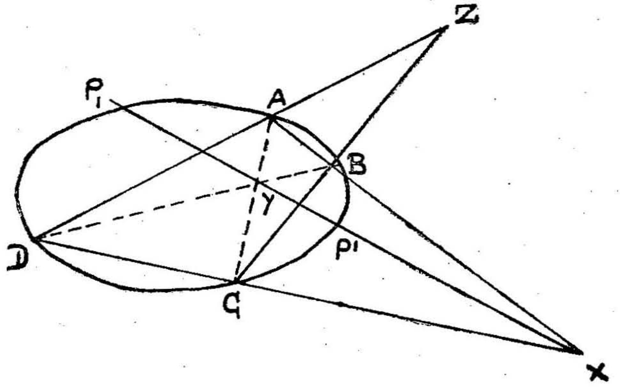
6·16. குறிப்பு 1. AD, BC; AC, BD; AB, CD; என்பவைகளை $ABCD$ என்ற புள்ளிகள் வழியுள்ள சிதைந்த இருபடி வரை எனக் கொள்க. அவைகளை l எனும் கோடு வெட்டும் சோடிப் புள்ளிகள் $A_1\ A_2$, $B_1\ B_2$, $C_1\ C_2$ அதே அடுக்குப்புள்ளி வரிசையில் சேர்ந்தனவாகும்.

6·17. குறிப்பு 2. l எனும் கோட்டில் இவ்வாறு நான்கு புள்ளி இருபடி வரைகளினுல் (system of 4 point conics) ஏற்படும் அடுக்குப்புள்ளி வரிசையின் ஒன்றுசேர் புள்ளிகள் E, F ஆகுக. அப்போது நான்கு புள்ளி இருபடி வரைகளில் ஒன்றை l எனும் கோடு E, E ல் வெட்டும் அதாவது தொடும். மற்றென்றை F ல் தொடும். இவ்வாறு பொதுவாக, நான்கு புள்ளிகள் வழிச்செல்வனவாகவும் ஒரு கோட்டைத் தொடுவனவாகவுமான இருபடி வரைகள் இரண்டே உள்ளன.

குறிப்பு 3. l எனும் கோடு நான்கு புள்ளிகளின் மூலை முக்கோணத்தின் ஒரு முனை வழிச் சென்றல்—அதாவது இரு எதிர்ப் பக்கங்கள் வெட்டும் புள்ளிவழி— அந்த முனையே ஒன்று சேர்

புள்ளியாகும். அதன்வழி 'சிதைந்த' இருபடிவரையாகிய இரு எதிர்ப்பக்கக் கோடுகள் செல்கின்றன. ஆகையால் இப்போது கோட்டைத் தொடும் சிதையாத இருபடிவரை ஒன்றே உள்ளது.

6·18. குறிப்பு 4. $ABCD$ என்ற நான்கு புள்ளிகள் வழி உள்ள இருபடி வரைத் தொகுதிகளில் ஒன்றை, நாற்கோணத்தின்



படம். 22

மூலை முக்கோணத்தின் பக்கமாகிய கோடு XY P_1 P_2 வில் வெட்டட்டும். கோடு சிதைந்த இருபடிவரையாகிய AB, CD ஐ X லும், AC, BD ஐ Y லும் வெட்டுவதால், இந்தக் கோட்டில் நான்கு புள்ளி இருபடி வரைகளால் அமையும் அடுக்குப்புள்ளி வரிசையின் ஒன்றுசேர் புள்ளிகள் X, Y ஆகும். XY எனும் கோடு ஒரு இருபடி வரையை (P_1 P_1') ல் வெட்டினல் அவை அடுக்குப் புள்ளி வரிசையின் சோடிப் புள்ளிகளாகும். $\therefore (P_1 P_1' XY) = -1$ ஆகும். இவ்வாறு நான்கு புள்ளி இருபடி வரைகளை, நாற்கோணத்தின் மூலை முக்கோணத்தின் பக்கம் சோடிப்புள்ளிகளில் வெட்டினல் அவை, முக்கோணத்தின் இருமுனைகளின் இசைப்பிரிவுப் புள்ளிகளாகும்.

6·19. தேசார்குத் தேற்றத்தின் ஒருபான்மைத் தேற்றம்

இதனை ஸ்டர்ம் (Sturm) தேற்றம் என்றும் கூறுவர்.

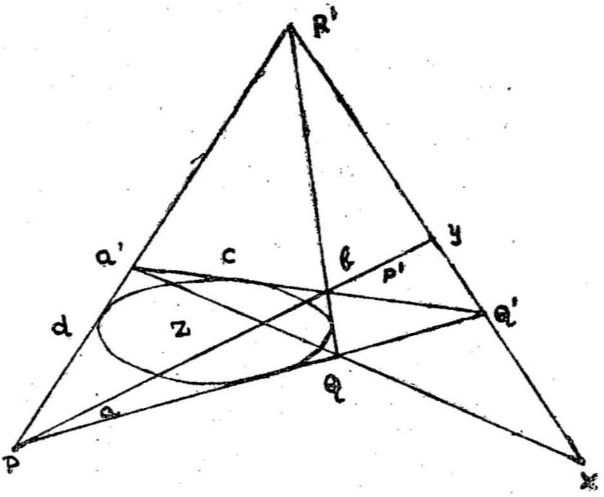
நான்கு கோடுகளைத் தொடும்படியாக அமையும் இருபுள்ளிவரைகளுக்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் சோடித் தொடுகோடுகள் அடுக்குக் கோட்டுக்கற்றையாக அமையும்.

குறிப்பு 1. நான்கு கோடுகள் தொடும்படியான இருபடி வரைகளை நான்கு கோட்டு இருபடிவரைகள் (4 line conics) என்போம்.

6·20. குறிப்பு 2. இவற்றுள், நான்கு கோடுகள் அமைக்கும் நாற்கரத்தின் மூன்று சோடி எதிர் முனைப் பக்கங்கள் சிதைந்த இருபடி வரைகளாகும். ஆகவே இவைகளை ஏதேனும் புள்ளி உடன் சேர்க்கவரும் மூன்று சோடிக் கோடுகளும் அடுக்குக் கோட்டுக் கற்றையாகும்.

6·21. குறிப்பு 3. மேற்கூறிய அடுக்குக்கற்றையின் ஒன்று சேர்கோடுகள் e, f ஆகுக. அப்போது நாற்கோட்டு வரைகளில் இரண்டு வரைகள் L வழிச்செல்வன ஆகும். அவற்றிற்கு e, f முறையே தொடு கோடுகளாகவும் அமையும்.

6·22. குறிப்பு 4. a, b, c, d எனும் நான்கு கோடுகள்



படம். 28

கொண்ட நாற்கரத்தின் மூன்று சோடி எதிர் முனைகள் PP', QQ', RR'. இவைகளால் ஆன முக்கோணம் XYZ. நான்கு கோடுகளைத் தொடும் இருபடி வரைகளுக்கு X லிருந்து வரையப்படும் சோடித் தொடு கோடுகள் அடுக்குக் கோட்டுக் கற்றையாகும். நாற்கோட்டு இருபடி வரைகளின் சிதைந்தவரைகள் (RR'), (QQ') எனும் இரு ஜோடிப்புள்ளிகளாகும், ஆகவே XRR', XQQ' எனும் கோடுகள் அடுக்குக்கற்றையின் ஒன்று சேர் கோடுகள். இவை

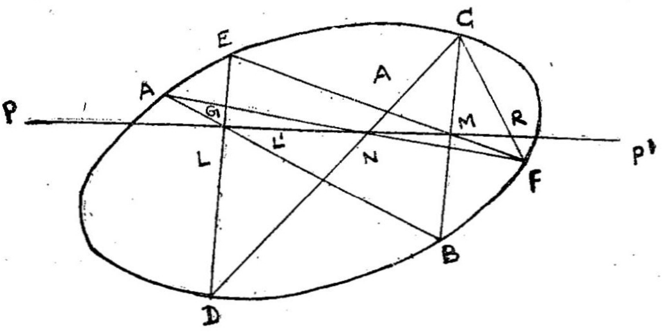
நாற்கரத்தின் மூலே முக்கோணத்தின் இருபக்கங்கள். X லிருந்து வரையப்படும் சோடித்தொடு கோடுகளுக்கு இசைப்பிரிவுக் கோடுகளாக அமைகின்றன,

இவ்வாறு கீழ்வரும் தேற்றம் காண்கிறோம்.

ஒரு நாற்கரத்தின் மூலே முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களிலும் அவை வெட்டும் முனையிலிருந்து நாற்கரத்தைத் தொடும்படியாக இருபடி வரைகளுக்குள்ள சோடித் தொடு கோடுகளின் இசைப் பிரிவுக் கோடுகளாகும்,

6·23. *பாஸ்கல் தேற்றம்*

ஒரு இருபடி வரையில் ஒரு அறுகோணம் அமைந்தால் அதன் மூன்று ஜோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகள் ஒரு கோடமையும்.



படம். 24

$ABCDEF$ இருபடிவரையில் முனைகளையுடைய அறுகோணம். AB, DE; வெட்டும்புள்ளி L, BC, EF வெட்டும் புள்ளி M, CD, FA வெட்டும்புள்ளி N. LMN ஒரு கோடமைவன என நிறுவ.

நிரூபணம்: MN எனும் கோடு AB, CE ஐ முறையே L, L' எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். இருபடி வரையை PP' லும் CFஐ R லும் வெட்டட்டும். $CDEF$ எனும் நான்கு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் பல இருபடி வரைகளில் இங்குள்ள இருபடி வரையும் ஒன்று. தேசார்குத் தேற்றத்தின் பயனுல் MN எனும் கோட்டில் அமையும் PP'; MN; RL'; எனும் சோடிப்புள்ளிகள் ஒரே அடுக்குப் புள்ளிவரிசையைச் சார்ந்தவை.

இதேபோல இருபடிவரை *AB CF* எனும் நான்கு புள்ளி வழியும் செல்வதால் *PP'; MN; RL* எனும் மூன்று சோடிப்புள்ளிகளும் ஒரே அடுக்குப்புள்ளி வரிசையைச் சார்ந்தவை. ஆனல் இரு அடுக்குப்புள்ளி வரிசைகளுக்கும் *PP': MN,* பொது. ஆகவே இரண்டும் ஒரே அடுக்குப் புள்ளி வரிசையாகும். இதில் *R* ன் சோடி ஒரே புள்ளியாக வேண்டும். ∴ *L, L'* என்பவை ஒரே புள்ளியாகும். *AB, DE,* எனும் கோடுகள் *MN* ல் சந்திக்க வேண்டும். அதாவது *L, M, N* ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள்.

குறிப்பு 1. சிதைந்த இருபடிவரையானுல் *ACE* ஒரு கோட்டிலும் *BDF* மற்ருெரு கோட்டிலுமாகும். பாஸ்கல் தேற்றம், முன்னரே நிறுவியுள்ள பாப்பஸ் தேற்றமாக மாறும்.

குறிப்பு 2. ஒரு அறுகோணத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொண்டால் ஆறு முனைகளும் ஒரு இருபடி வரையில் அமையும். அதாவது 5 முனைகளும் தரும் இருபடி வரை மீது 6 வது முனையும் அமையும். இதனை 'பிழைக் கொடுக்கம்' (Reductio ad absurdum) முறையாய் எளிதாய் நிறுவலாம்.

[இருபடி வரையின் குறுக்கு வீதப் பண்பினுல் பாஸ்கல் தேற்றத்தை நிறுவுதல்.
(படம் காண்க)

$$A\,(EBFD) = C\,(EBFD)$$

ED என்ற கோட்டிலும் *EF* என்ற கோட்டிலும் புள்ளி வரிசையைக் கொள்ள $(ELGD) = (EMFH)$

இரு சமக்குறுக்குவிகிதப் புள்ளிவரிசைகளில் *E* பொதுப்புள்ளி. ∴ *LM, GF, DH* இவை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைப்புள்ளிகள். *GF, DH* வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி *N.* ∴ *L,M,N* ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள். தேற்றத்தின் மறுதலையை கடைசி வரியிலிருந்து முதல் வரிசைக்கு எழுதவரும்.]

6·24. இருபடி வரையின்மேல் 5 புள்ளிகள் தரப்பட்டால், அதன் மேல் மற்றப் புள்ளிகளைக் காண

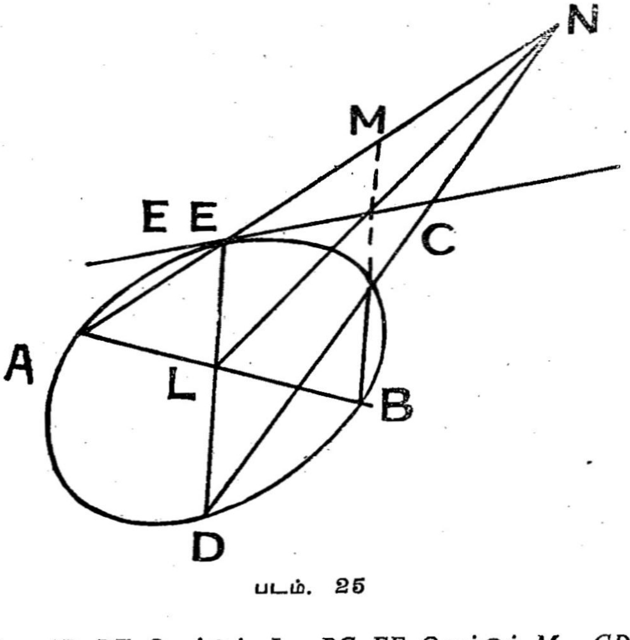
A, B, C, D, E என்பவை 5 புள்ளிகள். *E* ன் வழியாக *EF* எனும் ஏதேனும் ஒரு கோட்டைக் கொள்க. இந்தக் கோட்டை *A, B, C, D, E* வழிச் செல்லும் இருபடி வரை ஒரு புள்ளியில் *F*-ல் வெட்டவேண்டும். *F* ஐக் காணும் முறையைக் கூறுவோம்.

AB, DE எனும் கோடுகள் *L* ல் சந்திக்கின்றன. *BC, EF* எனும் கோடுகள் *M*ல் சந்திக்கின்றன. *CD* எனும் கோடு *LM* ஐ *N* ல் வெட்டட்டும். *AN* எனும் கோடு *EM* ஐ எங்குச் சந்திக்கிறதோ அதுவே இருபடி வரையில் உள்ள ஆறுவது புள்ளி *F*. ஏனெனில் *ABCDEF* என்ற அறுகோணத்தில் எதிர்ப்பக்கங்கள் *AB, DE* வெட்டும் புள்ளி *L, BC, EF* வெட்டும்புள்ளி *M* ; *CD, AF* வெட்டும் புள்ளி *N*, மூன்றும் ஒரு கோடமைப்புள்ளிகள். பாஸ்கல் தேற்றத்தின் மறுதலையால் *A,B,C,D,E* வழி உள்ள இருபடி வரை *F* வழியாகவும் செல்ல வேண்டும். *E* வழி வேறு பல கோடுகள் கொள்ள, ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் ஒரு புள்ளி வரும்.

6·25. ABCDE வழிச் செல்லும் இருபடிவரைக்கு E ல் உள்ள தொடுகோடு வரைய

ஆறு புள்ளிகளில் இரண்டு புள்ளிகள் பொருந்திஞல்—*E, F* உடன் பொருந்திஞல் — *EF* எனும் கோடு இருபடிவரைக்குத் தொடு கோடாகும். இதைப் பயன்படுத்துவோம்.

ABCDEF எனும் அறுகோணம் இருபடி வரையில் உள்ளது.



படம். 25

∴ *AB, DE* வெட்டும் *L*, *BC EE* வெட்டும் *M*, *CD, EA* வெட்டும் *N* ஒரு கோடமையம். அதுவே *LN, BC* வெட்டும்

புள்ளி M ஐ E யுடன் சேர்க்கவருவது EE எனும் கோடு அதாவது E ல் இருபடி வரையப்படும் தொடு கோடாகும்.

6·26. பிரயன்கன் தேற்றம் (Brianchon's Theorem)

பாஸ்கல் தேற்றத்தின் இருபான்மைத் தேற்றம் இது.

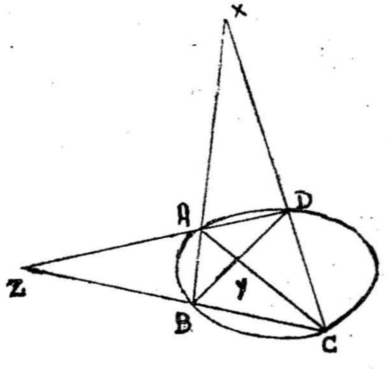
ஆறு கோடுகள் ஒரு இருபடிவரையைத் தழுவினல், அவைகளால் ஏற்படும் அறுகோணத்தின் எதிர்முனைகளைச் சேர்க்கும் மூன்று கோடுகள் ஒரு புள்ளிவழிக் கோடாகும்.

abcdef என்பவை ஆறுகோடுகளானல் $\overline{ab}-\overline{de}$: $\overline{be}-\overline{cf}$; $\overline{cd}-\overline{fa}$ எனும் மூன்று கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளாகும். $ABCDEF$ என்பது அறுகோணமானல் AD, BE, CF எனும் கோடுகள் எதிர்முனைகளைச் சேர்க்கும் கோடுகளாகும். (நடுவில் இரண்டு முனைகள் விட வேண்டும்)

6·27. இசைக் கோடும், இசைப்புள்ளியும் (Pole and Polar)

ஒரு இருபடி வரைக்கு, X எனும் புள்ளியின் இசைக்கோடு என்பது, X வழியுள்ள கோடு மாறும்போது, அது வரையை வெட்டும் புள்ளிகளைச் சார்ந்து X இன் இசையிணைப் புள்ளியின் இயங்குவரை (Locus) ஆகும்.

அதாவது X வழியுள்ள நாண்களின் முனைகளைச் சார்ந்த X இன் இசையிணைப் புள்ளிகள் கொண்ட புள்ளிக் கணம் (Set of harmonic Conjugates of w.r.t ends of chords through X) இருபடி வரைக்கு X ன் இசைக் கோடு என்பதாம்.



படம். 26

முதலில் இந்த இயங்கு வரை ஒரு கோடு என்பதை நிறுவுவோம். X என்பது ஒரு புள்ளியாகுக. AB, CD அதன் வழி இருபடிக்கு இரண்டு நாண்கள், AC, BD எனும் கோடுகள் Y லும், AD, BC எனும் கோடுகள் Z லும் சந்திக்கட்டும்.

நிரூபணம்

A,B,C,D என்ற நான்கு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒவ்வொரு இருபடி வரையும், *X* வழிச் செல்லும் கோட்டில் அடுக்குப் புள்ளி வரிசையை ஏற்படுத்தும் (தேசார்குத் தேற்றம்). *AB, CD* எனும் இருகோடுகளும் நான்குப் புள்ளி இருபடிவரையில் ஒன்றும். அவை *X*ல் சந்திப்பதால் *X* வழிச் செல்லும் நாணில் ஏற்படுத்தும் அடுக்குப் புள்ளி வரிசைக்கு *X* 'ஒன்றுசேர்' புள்ளியாகும்: மற்றொரு ஒன்றுசேர் புள்ளி, (*X* வழி தரப்பட்டுள்ள இருபடி வரைக்குள்ள நாணின் முனைகளைச் சார்ந்தது.) *X* இன் இசையிணைப் புள்ளி ஆகும்.

*AC,BD*யும் நான்கு புள்ளி இருபடிவரையாதலால் *YX, YX'* எனும் கோடுகள் *YA, YB* க்கு இசைப்பிரிவுக் கோடுகளாகும். ஆகையால் *X'* ன் இயங்குவரை *Y* வழிச் செல்லும் ஒரு கோடாகும். இதே போல அது *Z* வழிச் செல்லும் கோடென நிறுவலாம். ஆகையால் *X'* இன் இயங்குவரை *YZ* எனும் கோடாகும்.

இந்த இயங்குவரை —*YZ* எனும் கோடு—இருபடிவரையை *T T'* ல் வெட்டட்டும். *XT* இருபடி வரையை வெட்டும் புள்ளிகளுக்கு *X* இன் இசையிணைப்புள்ளி *T*: ஆனால் *T* யே ஒரு வெட்டும் புள்ளியாவதால், மற்ற வெட்டும் புள்ளியும் அதனுடன் பொருந்த வேண்டும். ஆகையால் *XT* வரைக்குத் தொடு கோடாகும். இதேபோல *XT'* ம் தொடு கோடாகும். ஒரு புள்ளியிலிருந்து இருபடி வரைக்கு இரண்டு தொடுகோடுகளே உள்ளமையால் *X* தரப்பட்டால் *T, T'* நிச்சயிக்கப்படுகிறது. ஆகவே **X இன் இசைக்கோடு TT' எனும் ஒரே கோடாகும்.** *X* எனும் புள்ளி அதன் இசைப்புள்ளி (Pole) எனப்படும்.

6·28. குறிப்பு 1. *TT'* எனும் கோடு *X*ன் தொடு நாண் எனவும் கூறப்படும். ஏனெனில் *X*-ல் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் வரையைத் தொடும் புள்ளிகள் வழிச் செல்வதால், இவ்வாறு *X*ன் இசைக்கோடு அதன் தொடு நாண் எனவும் காண்கிறோம்.

6·29. குறிப்பு 2. ஒரு கோடு, இருபடி வரையை இரண்டு புள்ளிகளில் மட்டுமே வெட்டும். ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஒரு தொடு கோடேயுள்ளது. ஆகவே கோடு தரப்பட்டால், இரு தொடு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி ஒன்றே. ஆகவே கோடும் அதன் இசைப்புள்ளியும் (*1—1*) தொடர்பில் உள்ளது.

6·30. குறிப்பு 3. X எனும் புள்ளி, இருபடி வரை மீது இருந்தால் அங்குள்ள தொடு கோடே X-ன் இசைக்கோடாகும்.

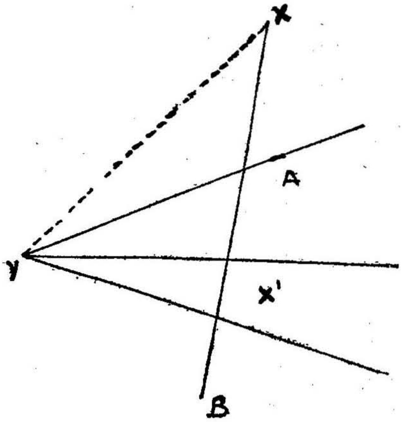
குறிப்பு 4. ஒரு கோடு இருபடி வரைக்கு X தொடு கோடானல் அதன் இசைப்புள்ளி X எனும் தொடும்புள்ளியே.

6·31. தன்னிசை முக்கோணம் (Self conjugate triangle)

$ABCD$ என்ற நாற்கோணம் இருபடி வரையில் அமைந்துள்ளது. XYZ அதன் மூலை முக்கோணம். YZ இன் நிலை $ABCD$ ஐப் பொருத்ததே தவிர, அவை வழிச் செல்லும் இருபடி வரைகளைப் பொறுத்ததல்ல. ஆகவே, நான்கு புள்ளி இருபடி வரைகள் யாவற்றிற்கும் YZ, X ன் இசைக்கோடாகும். இதேபோல XY, Z ன் இசைகோடாகும். இவ்வாறு ஒரு இருபடிவரைக்கு, ஒரு முக்கோணத்தில் ஒவ்வொரு பக்கமும் அதன் எதிர் முனையின் இசைக் கோடானல், அத்தகைய முக்கோணம் தன்னிசை முக்கோணம் (self conjugate triangle) எனப்படும்.

இங்கு XYZ எனும் முக்கோணம் நான்கு புள்ளி இருபடி வரைகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் தன்னிசை முக்கோணம் ஆகும். அதாவது ஒரு நாற்கோணத்தின் முனைகள் வழிச் செல்லும் எல்லா இருபடிவரைகளுக்கும், அதன் மூலை முக்கோணம் தன்னிசை முக்கோணம் ஆகும்.

[6·32. சிதைந்த இருபடிவரையின் இசைப் புள்ளியும் இசைக் கோடும்



படம். 27

YA, YB இருகோடுகள் சிதைந்த இருபடி வரை. X என்பது ஒரு புள்ளி. YA, YB யின் YX இன் இசைப் பிரிவு கோடு YX' ஆகுக. X வழியுள்ள கோடு, சிதைந்த இருபடி வரையை AB யிலும் YX' ஐ X' லும் வெட்டட்டும். அப்போது $(XX', AB) = -1$; X' என்பது X இன் இசைக் கோட்டில் அமைகிறது. X வழி எந்தக் கோடாயினும் X', YX ன் இசைப் பிரிவுக் கோட்டில் (YA, YB ஐச்

சார்ந்த) அமையும். $\therefore$ YX' என்பதுவே X இன் இசைக் கோடாகும்.

குறிப்பு 1. தளத்தில் உள்ள புள்ளிகளின் இசைக் கோடுகள் யாவும் Y வழிச் செல்லும்.

குறிப்பு 2. Y இன் இசைக் கோடுகாண, Y வழிச் செல்லும் ஒவ்வொரு கோடும், இருபொருந்தும் புள்ளிகளில் YA, YB ஐ வெட்டுவதால், அது குறிப்பான ஒரு கோடல்ல (undefined). ஆகவே தளத்தில் உள்ள எந்தக் கோடாயினும் அதன் இசைப் புள்ளி Y என வரும். இசைப்புள்ளி-இசைக்கோடிடையே $(1-1)$ தொடர்பு அவசியமாதலால், மேற்கூறியதை நீக்க வேண்டும். தேவையுமில்லை.]

இனிமேல் கூறப்போவதில் சிதையாத இருபடி வரையைப் பற்றியே கூறுவோம்.

6·33. இசைப் புள்ளி, இசைக்கோடு இவற்றின் எளிய பண்புகள் (Elementary Properties of Pole and Polar)

ஒரு இருபடி வரைக்கு

(*i*) **P** எனும் புள்ளியின் இசைக்கோடு **Q** வழிச் சென்றால், **Q** வின் இசைக்கோடு **P** வழிச் செல்லும்.

P எனும் புள்ளியின் இசைக் கோட்டில் Q ஒரு புள்ளி. PQ இருபடி வரையை RS எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும், Y, P ன் இசைக் கோட்டில் இருப்பதால் $(PQ, RS) = -1$ ஆகும். $\therefore$ P, Q வின் இசைக்கோட்டில் அமைய வேண்டும். அல்லது Q வின் இசைக்கோடு P வழிச் செல்ல வேண்டும். இத்தகைய இரு புள்ளிகள், (ஒன்றின் இசைக் கோட்டின் மேல் மற்றது இருப்பது) இருபடி வரையின் துணையியப் புள்ளிகள் **(Conjugate Points for the conic)** எனப்படும். ஒன்று மற்றதன் துணையியப்புள்ளி எனப் படும். ஒரு புள்ளியின் இசைக் கோட்டில் அமையும் ஒவ்வொரு புள்ளியும், அதன் துணையியப் புள்ளியாகும்.

6·34. (*ii*) மேற்கூறிய தேற்றத்தைக் கீழ்வருமாறும் கூறலாம். ஒரு இருபடி வரைக்கு **P** எனும் கோட்டில், **Q** எனும் கோட்டின் இசைப்புள்ளி அமைந்தால் **Q** வில் அமையும்.

p இன் இசைப் புள்ளி P ஆகுக.

q இன் இசைப் புள்ளி Q ஆகுக.

P இன் இசைக்கோடு அதாவது $p-Q$ வழிச்சென்றால், Q வின் இசைக்கோடு — அதாவது $q-P$ வழிச் செல்லும் என்றோம். p யில் Q அமைந்தால், q வில் P அமையும் என்பதே இதன் பொருள். ஆகவே இந்தத் தேற்றம் முதல் தேற்றத்தின் இருபான்மை மட்டுமல்ல. முதல் தேற்றத்தையே வேறுவகையாகக் கூறுவதே ஆகும்.

குறிப்பு: ஒரு இருபடி வரைக்கு ஒரு கோட்டின் இசைப் புள்ளி இன்னொரு கோட்டில் அமைந்தால் இரண்டு கோடுகளும், இருபடிவரைக்கு ஒன்றற்கொன்று துணையியக்கோடுகள் (**Conjugate lines for the conic**) எனப்படும்.

6·35. *(iii)* **P, Q, R, S ... என்பவை ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளானல், ஒரு இருபடி வரைக்கு அவற்றின் இசைக் கோடுகள், ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளாகும்.**

P, Q, R, S .... எனும் புள்ளிகள் l எனும் கோட்டில் அமையட்டும். இருபடி வரைக்கு l இன் இசைப்புள்ளி L ஆகுக.

$P, Q, R, S, \ldots$ எனும் புள்ளிகளின் இசைக்கோடுகள் $p, q, r, s \ldots$ ஆகுக. L ன் இசைக் கோடு l. அது P வழிச் செல்கிறது. ஆகவே P யின் இசைக் கோடு L வழிச் செல்கிறது. இவ்வாறே, Q, R, S எனும் புள்ளிகள் வழி L ன் இசைக் கோடு l செல்வதால், அவற்றின் இசைக் கோடுகள் $q, r, s \ldots$ என்பனவும் L வழிச் செல்கிறது.

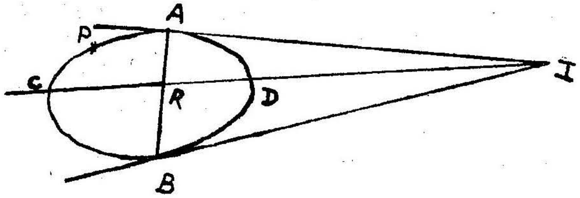
இவ்வாறு $P, Q, R, S \ldots$ எனும் புள்ளிகள் l எனும் கோட்டில் அமைந்தால் அவற்றின் இசைக்கோடுகள் p, q, r, s என்பவை l இன் இசைப்புள்ளியான L வழிக் கோடுகளாகின்றன.

(iv) **l (PQRS ..) என்ற புள்ளி வரிசையும் L (pq, rs...) எனும் கோட்டுக் கற்றையும் தொடர்புடையன:** ஏனெனில் P எனும் புள்ளிக்கென p எனும் ஒரே ஒரு கோடும், p எனும் கோட்டிற்கு P எனும் ஒரே புள்ளி இருப்பதால் $(1-1)$ தொடர்பைக் காண்கிறோம்.

$$\therefore \quad l\,(PQRS \ldots \ldots) = L\,(pqrs \ldots \ldots)$$

6·36. (v) ஒரு இருபடிவரைக்கு AB, CD இரு துணையியக் கோட்டு நாண்கள் ஆகுக. அவை R எனும் புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. A, B எனும் புள்ளிகளில் உள்ள தொடு கோடுகள் T ல் வெட்டினல் AB இன் இசைப்புள்ளி T ஆகும். ஆகவே அது CD ல் அமையும். T வழியுள்ள நாண்கள் இருபடி வரையை அடுக்குப் புள்ளி வரிசையில் உள்ள சோடிப்புள்ளிகளில் வெட்டும். இவற்

றின் ஒன்று சேர் புள்ளிகள் AB ஆகும். இருபடி வரையில் P ஏதேனும் ஒரு புள்ளியானால் PC, PD என்பவை PA, PB எனும்



படம். 28

கோடுகளை ஒன்று சேர் கோடுகளாகக் கொண்ட அடுக்குக் கோட்டுக்கற்றையின் சோடிக் கோடுகளாகும். ∴ PC, PD எனும் கோடுகளும் PA, PB எனும் கோடுகளும் இசைக் கோட்டுக் கற்றையாகிறது.

இவ்வாறு இரண்டு துணையிய நாண் முனைகளை, இருபடி வரையில் ஒரு புள்ளியுடன் சேர்க்க, இசைக் கோட்டுக்கற்றை உருவாகிறது.

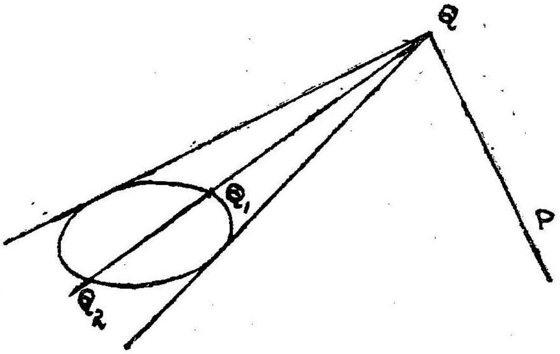
மேற்கூறிய காரணங்களைப் பின்னிருந்து முன்னாகக் கூற இதன் மறுதலை நிறுவப்படுகிறது. அதாவது இருபடி வரையில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் அமையும் இசைக்கோட்டுக் கற்றையின் கோடுகள் வரையை, துணையிய நாண்களின் முனைகளில் வெட்டு கின்றன. அதாவது PA, PB; PC PD எனும் இசைக் கோட்டுக் கற்றையின் கோடுகள் இருபடி வரையின் நாண்களானால் AB, CD எனும் நாண்கள் துணையியக் கோடுகளாகும்.

6·37. இசைப்புள்ளி, இசைக்கோடு இவற்றின் இருபரன்மைப் பண்பு (Duality of Pole and Polar)

ஒரு புள்ளியின் இசைக் கோடு என்றால் என்ன என்பதை வரையறுத்து அது ஒரு கோடு என நிறுவினோம். இருபான்மையாக p எனும் கோட்டைக் கொள்வோம். அதன் மேல் இயங்கும் Q எனும் புள்ளியைக் கொள்வோம். இருபடி வரைக்கு Q விலிருந்துள்ள இருதொடு கோடுகளுக்கு, p ன் இசையிணைக் கோடுகள் Q மாறமாற P எனும் புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவலாம். இதை P ஐ p எனும் கோட்டின் இசைப்புள்ளி என வரையறுக்கலாம்.

P எனும் கோடு இருபடி வரையை Q_1-ல் வெட்டினால், Q_1 லிருந்து இருபடிவரைக்குள்ள தொடு கோடுகள் ஒன்றுடனொன்று பொருந்தும் கோடுகளாகின்றன. ஆகவே L யின் இசையிணைக்

கோடும் அதே தொடு கோடாகும். ஆகவே அது p யின் இசைப் புள்ளி P வழிச் செல்லும். அதேபோல, p எனும் கோடு இருபடி



படம். 29

வரையை Q_2 எனும் இரண்டாவது புள்ளியில் வெட்ட, Q_2 வில் உள்ள தொடு கோடு P வழிச் செல்லும். இவ்வாறு ஒரு கோட்டின், இருபடி வரைக்குள்ள, இசைப்புள்ளி, அது இருபடி வரையை வெட்டும் புள்ளிகளில் உள்ள தொடுகோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியாகும். p அதன் தொடு நாணுகும்.

இவ்வாருக இசைப்புள்ளியின் இருபான்மை இசைக்கோடு. இசைக்கோட்டின் இருபான்மை இசைப்புள்ளி.

எனவே இசைப்புள்ளி, இசைக்கோடு வரும் தேற்றம் ஒவ்வொன்றுக்கும், இருபான்மையாக இசைக்கோடு, இசைப்புள்ளி என ஒரு தேற்றம் உள்ளது.

உதாரணமாக.

(*i*) இரு துணையியப் புள்ளிகளும், அவைகளைச் சேர்க்கும் கோடு இருபடி வரையை வெட்டும் புள்ளிகளும் ஒன்றற்கொன்று இசைப்பிரிவுப் புள்ளிகளாகும்.

இதன் இருபான்மைக் கூற்று (dual statement) இருதுணையியக்கோடுகளும், அவை வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து இருபடி வரைக்கு வரையப்படும் இரு தொடு கோடுகளும் ஒன்றற்கொன்று இசைப் பிரிவுக் கோடுகளாகும்.

உதாரணம் 2: நான்கு புள்ளி வழிகள் செல்லும் இருபடி வரைகளுக்கு, அப்புள்ளிகள் கொண்ட நாற்கோணத்தின் மூலை

முக்கோணம் தன்னிசை முக்கோணம் ஆகும் என்பதை நிறுவி யுள்ளோம்.

இதன் இருபான்மைக் கூற்று :

"நான்கு கோடுகளைத் தொடும் இருபடி வரைகளுக்கு, அக் கோடுகளைக் கொண்ட நாற்கரத்தின் மூலைமுக்கோணம் தன்னிசை முக்கோணம் ஆகும்" என்பதாம்.

6·38. இரண்டு இருபடி வரைகள் (Two Conics)

ஒரு கோடு, இருபடிவரையை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டு கின்றது. இரண்டு கோடுகள் அதனை நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டு கின்றன. இரண்டு கோடுகளை சிதைந்த இருபடி வரை எனலாம். ஆகவே இரண்டு சிதையாத இருபடி வரைகள் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன எனக் கொள்வோம். (இதனை வேறு முறையில் பின்னர் நிலைநாட்டுவோம்). ஐந்து புள்ளிகள் வழி ஒரே இருபடி வரையிருப்பதால் ஐந்து புள்ளிகளில் வெவ்வேறு இரு படி வரைகள் இருக்க முடியாது.

இரண்டு இருபடி வரைகள் வெட்டிக்கொள்ளும் நான்கு புள்ளி கள் ஒரு நாற்கோணத்தை உருவாக்குகின்றன.

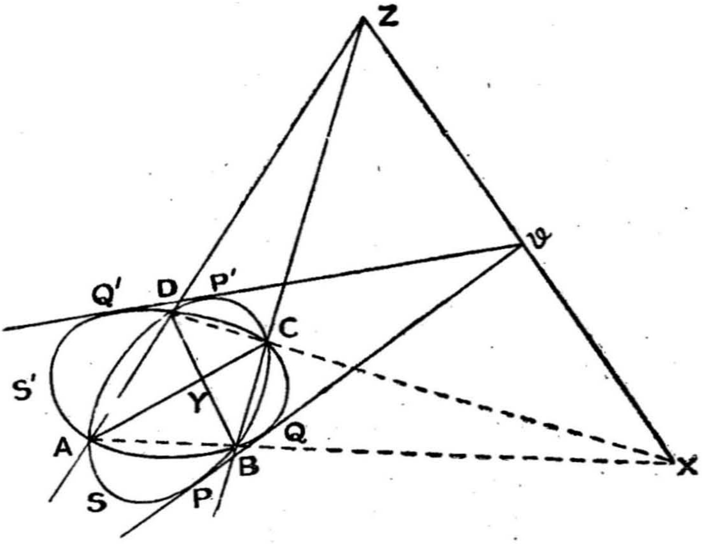
இருபான்மையாக இரண்டு இருபடிவரைகள் நான்கு பொதுத் தொடுகோடுகளையுடையன. இவை ஒரு நாற்கரத்தை உருவாக்கு கின்றன.

6·39. இந்த இரண்டின் மூலைமுக்கோணங்கள் வெவ்வேறல்ல. ஒன்றேயாகும் எனக் காட்டுவோம். அதாவது இரண்டு இருபடி வரைகள் வெட்டிக்கொள்ளும் நான்கு புள்ளிகள் தரும் நாற்கோணத் தின் மூலை முக்கோணமும், அவற்றைத் தொடும், நான்கு தொடு கோடுகள் தரும் நாற்கரத்தின் மூலை முக்கோணமும் ஒன்றே.

S, S' எனும் இருபடி வரைகள் A, B, C, D எனும் புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. $ABCD$ என்ற நாற்கோணத்தின் மூலை முக்கோணம் XYZ ஆகுக. PQ என்பது S, S' ன் ஒரு பொதுத் தொடு கோடு. S ஐ Pயிலும் S' ஐ Q விலும் தொடுகிறது. XZ ஐ Vயில் வெட்டுகிறது. P' என்பது S க்கு மற்றொரு தொடுகோடு.

XZ என்பது Y ன் இசைக்கோடு (S எனும் வரைக்கு) இது V வழிச் செல்கிறது. ஆகவே Vயின் இசைக் கோடு $PP'Y$ வழிச் செல்ல வேண்டும். VX, VY S எனும் வரைக்குத் துணையியக் கோடுகள் ஆகையால் VP, VP' க்கு அவை இசைப்பிரிவுக் கோடு

கள். அதே போல VQ' எனும் தொடுகோடு S' க்கு, V யிலிருந்து வரைந்தால் VQ' ; VQ எனும் கோடுகள் VX, VY க்கு இசைப் பிரிவுக் கோடுகளாகும். ஆனால் VP, VQ எனும் கோடுகள்



படம், 30

ஒன்றே. ஆகையால் VQ, VQ' எனும் கோடுகளும் ஒன்றே. அதாவது V, Q, Q' எனும் கோடு S, S' க்குப் பொதுத் தொடு கோடாகும். SS' ன் இரண்டு பொதுத் தொடு கோடுகள் XZ ல் சந்திக்கின்றன. இதேபோல மற்றிரு பொதுத் தொடு கோடுகளும் XZ ல் சந்திக்கும். ஆகவே, நான்கு பொதுத் தொடு கோடுகளால் ஆகிய நாற்கரத்தின் மூலைமுக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் XZ. இதே போல XY, YZ மற்ற இருபக்கங்களாகும். எனவே இரண்டு இருபடி வரைகள் வெட்டும் புள்ளிகளால் ஆன நாற்கோணத்தின் மூலை முக்கோணமும், அவற்றின் பொதுத் தொடு கோடுகளால் ஆகிய நாற்கரத்தின் மூலை முக்கோணமும் ஒன்றே.

[6·40. *குறிப்பு ;* a, b, c, d, எனும் கோடுகள் ஒரு இருபடி வரையை $ABCD$ என்ற புள்ளிகளில் தொட்டால் a, b, c, d என்ற நாற்கரத்தின் மூலை முக்கோணமும் $ABCD$ என்ற நாற் கோணத்தின் மூலை முக்கோணமும் ஒன்றே.

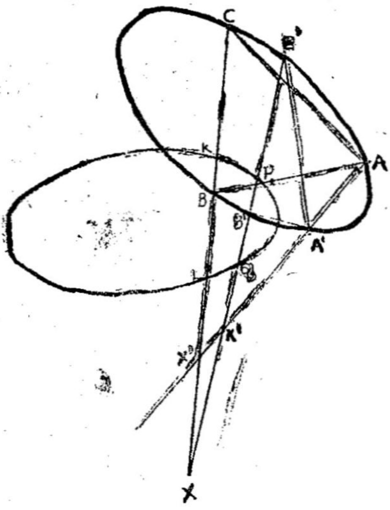
$ABCD$ யில் AC, BD, Y ல் வெட்டட்டும். AB, CD, Xலும் AD, BC, Zலும் வெட்டட்டும். XYZ என்பது $ABCD$ என்ற நாற்

கோணத்தின் மூலமுக்கோணமாகும். B யில் உள்ள தொடு கோடு b, XZ ஐ V யில் வெட்டட்டும். அப்போது V யின் இசைக் கோடு B வழிச் செல்லவேண்டும் : Y இன் இசைக்கோடு XZ ஆதலாலும் அது V வழிச் செல்வதாலும் V யின் இசைக் கோடு Y வழியும் செல்லவேண்டும். BY, V யின் இசைக்கோடா கும். BY இருபடி வரையை D ல் வெட்டுகிறது. $\therefore$ VD என்பது இருபடி வரைக்கு D ல் உள்ள தொடுகோடு d; b, d எனும் கோடு கள் XZ ல் சந்திக்கின்றன. இதேபோல a, c என்ற தொடுகோடு கள் – A,C யில் உள்ளவை— XZ ல் சந்திக்கின்றன எனக் காட்ட லாம். ஆகையால் $a\ b,c,d$ என்ற நாற்கரத்தின் மூலை முக் கோணத்தின் ஒரு பக்கம் XZ; இதே போல மற்ற பக்கங்கள் ZY, YX ஆகும். ஆகவே நாற்கரத்தின் மூலமுக்கோணமும் XYZ ஆகும் இவ்வாறு மேலே தேற்றத்தில் நிறுவியது போலவே இங்கும் நிருபணம் எழுதுகிறோம்.]

6·41. இருபடி வரைகளும், முக்கோணங்களும் (Conics and triangles)

தேற்றம்: ஒரு இருபடி வரையில் அமையும் முக்கோணம் இன் னெரு இருபடி வரைக்குத் தன்னிசை முக்கோணமானல், அப்பேர்க் கொத்த முக்கோணங்கள் அளவில.

S' S என்ற இருபடி வரைகள். ABC எனும் முக்கோணம் S ல் உள்ளது, S க்குத் தன்னிசை முக்கோணம் ஆகும்.



படம். 31

S ல் A' எனும் ஒரு புள்ளியைக் கொள்க. S' க்கு A' இன் இசைக்கோடு S ஐ B' C' ல் வெட்டட்டும். $A'B'C'$ எனும் முக்கோணம் S' ல் அமைகிறது. இந்த முக்கோணம் S' க்குத் தன்னிசை முக்கோணம் என நிறுவுவோம்.

B' C' எனும் கோடு S' ஐ FQ வில் வெட்டட்டும். BC ஐ அது X லும், A' A ஐ X' லும் வெட்டட்டும். A ன் இசைக்கோடு BC, X வழிச் செல்வதால், X இன் இசைக்

கோடு A வழிச் செல்ல வேண்டும். இதேபோல X இன் இசைக் கோடு A' வழியும் செல்ல வேண்டும். $\therefore$ X எனும் புள்ளி $A'\ A$ இன் இசைப் புள்ளியாகும். $\therefore$ B' க்கு X, X' துணையியபுள்ளிகளாகும்.

$\therefore$ $(XX', PQ) = -1$ இதே போல $B'\ C'$, எனும் பக்கம் CA ஐ Y இலும், $A'B$ ஐ Y' இலும் வெட்டட்டும். $AB, A'C$ ஐ ZZ' ல் வெட்டட்டும். $(YY', PQ) = -1$; $(ZZ', PQ) = -1$ எனவாகும்,

$\therefore$ $XX' : YY' : ZZ'$: என்பவை அடுக்குப்புள்ளி வரிசையில் உள்ள சோடிப் புள்ளிகள்; PQ அவற்றின் ஒன்றுசேர் புள்ளிகள். $ABCA'$ என்ற நான்குபுள்ளி இருபடி வரைகளினுல் BCல் இந்த அடுக்குப் புள்ளி வரிசை ஏற்படுகிறது. S என்பது இவற்றுள் ஒரு இருபடி வரை, ஆகையால் $(B, C', PQ) = -1$ ஆகிறது. $\therefore$ S' க்கு இசைக் கோடு $A'\ C'$ ஆகும். அதேபோல C'இன் இசைக் கோடு $A'\ B'$ ஆகும். இவ்வாறு $A'\ B'\ C'$ எனும் முக்கோணம் S ல் வரையப்பட்டு S' க்குத் தன்னிசை முக்கோணம் ஆகிறது. A' என்பதை S ல் எங்கு வேண்டுமானுலும் எடுக்கலாம். ஆகையால் எண்ணற்ற இத்தகைய முக்கோணங்கள் உள்ளன.

மேற்கூறிய தேற்றத்தை வேறுவிதமாகவும் கூறலாம்.

6·42. தேற்றம்: **ஒரு இருபடிவரைக்கு இரண்டு முக்கோணங்கள் தன்னிசை முக்கோணங்களானுல் அவற்றின் 6 முனைகள் ஒரே இருபடி வரையில் அமையும்.**

S' எனும் இருபடி வரைக்கு $ABC, A'B'C'$ எனும் முக்கோணங்கள் தன்னிசை முக்கோணங்களாகுக. மேற்கூறியதிலிருந்து $ABCA'$ வழி செல்லும் இருபடி வரைகள் $B'\ C'$ யில் ஏற்படுத்தும் அடுக்குப் புள்ளிவரிசையின் சோடிப்புள்ளிகள் $B'\ C'$ ஆகும். ஆகவே $ABCA'\ B'$ வழிச்செல்லும் இருபடிவரை C' வழியாகவும் செல்ல வேண்டும்.

இவ்வாறு ஆறு முனைகள் ABC; $A'\ B'\ C'$, ஒரு இருபடி வரை S ல் அமைகின்றன.

6·43. தேற்றத்தின் மறுதலை

ஒரு இருபடிவரையில் இரண்டு முக்கோணங்கள் அமைந்தால் அவையிரண்டும் ஒரு இருபடிவரைக்குத் தன்னிசை முக்கோணங்களாக அமையும்.

ABC, $A'B'C'$ என்பவை S எனும் இருபடிவரையில் உள்ள முக்கோணங்கள். $B'C'$ எனும் கோடு BC ஐ X லும் AA'ஐ X' இலும், வெட்டுகிறது. BC, AA' எனும் கோடுகள் X' ல் வெட்டுகின்றன. $B'C$, XX' எனும் இருசோடிப் புள்ளிகள் நிச்சயிக்கும் அடுக்குப்புள்ளி வரிசையின் ஒன்றுசேர் புள்ளிகள் P, Q ஆகுக. BC, XX' எனும் சோடிப்புள்ளிகள் தரும் அடுக்குப்புள்ளி வரிசையின் ஒன்றுசேர் புள்ளிகள் K, L ஆகுக.

PQ, KL வழியாகவும் AK ஐ K ல் தொடும்படியாகவும் உள்ள இருபடிவரையைக் கொள்க. ($PQKKL$ எனும் 5 புள்ளிகள் வழியாவதால் ஒரே இருபடிவரை உள்ளது.) இதை S' என்றால் ABC, $A'B'C'$ எனும் முக்கோணங்கள் S' க்கு தன்னிசை முக்கோணங்களாகும் என நிறுவுவோம்.

$(XX; PR) = -1$ $(XX', KL) = -1$ $\therefore$ $X'X'$ என்பது X இன் இசைக்கோடு (S' க்கு). K இன் இசைக்கோடு AK யும் X இன் இசைக்கோடு $X'X'$ ம் A வழியுள்ளவை. $\therefore$ XK அல்லது BC' A யின் இசைக்கோடாகும். $(BC, KL) = -1$ ஆனதால் B, C எனும் புள்ளிகள் S' க்கு துணையியப்புள்ளிகள். $\therefore$ ABC எனும் முக்கோணம் S' க்குத் தன் இசை முக்கோணம் ஆகிறது.

$(B'C', PQ) = -1$ ஆனதால் B', C' எனும் புள்ளிகள் S' க்குத் துணையியப் புள்ளிகளாகும். $B'C'$ இன் இசைப்புள்ளி A' எனக் கொண்டால் $A'B'C'$, S' க்குத் தன்னிசை முக்கோணமாகும். அதனால் A, B, C, B', C' வழிச்செல்லும் இருபடிவரை S, A' வழிச் செல்லவேண்டும். AA' ல் A' அமைகிறது. S லும் அமைகிறது. ஆகவே A'ம் A' ம் ஒரே புள்ளியே. $\therefore$ S' க்கு $A'B'C'$ ம் தன்னிசை முக்கோணமாகும். இத்தகைய இருபடிவரை S' ஒன்றே உள்ளது எனக் காண்கிறோம்.

6·44. இருபான்மைத் தேற்றங்கள்

மேற்கூறிய தேற்றங்களின் இருபான்மைத் தேற்றங்களை எழுதுவோம்.

(*i*) ஒரு இருபடிவரையைப் பக்கங்கள் தொடும்படியாகவும், மற்றொரு இருபடிவரைக்கு தன்னிசையாகவும் ஒரு முக்கோணம் இருந்தால், அத்தகைய முக்கோணங்கள் எண்ணற்றவை.

(*ii*) இரண்டு முக்கோணங்கள் ஒரு இருபடி வரைக்குத் தன்னிசை முக்கோணங்களானால், அவற்றின் பக்கங்கள் ஒரு இருபடி வரையைத் தொடும்.

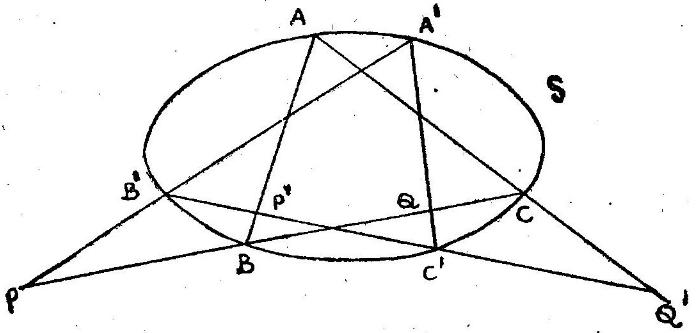
(iii) இரண்டு முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் ஒரு இருபடி வரையைத் தொட்டால், அவை இரண்டும் தன்னிசையாக அமையும் ஒரு இருபடி வரையைக் காண முடியும்.

(iv) இருதேற்றங்களிலிருந்து காண்பது ; ஒரு இருபடி வரையில் இரு முக்கோணங்கள் அமைந்தால் அவற்றின் பக்கங்கள் இன்னெரு இருபடி வரையைத் தொடும். மறுதலையாக இரு முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் ஒரு இருபடி வரையைத் தொட்டால் அவற்றின் முனைகள் மற்றெரு இருபடி வரையில் அமையும்.

இதிலிருந்து இன்னெரு தேற்றத்தையும் காண்கிறேம்.

6·45. தேற்றம்: ஒரு முக்கோணத்தை ஒரு இருபடி வரைக்குள் இருக்குமாறும் மற்றெரு இருபடி வரையைத் தொடுமாறும் வரைய முடியுமானல், அத்தகைய முக்கோணங்கள் எண்ணற்றவை வரைய முடியும்.

இதற்குத் தனியாக இன்னெரு நிரூபணம் கூறுவோம்.



படம். 32

S எனும் இருபடி வரையில் ABC, $A'B'C'$ எனும் முக்கோணங்கள் உள்ளன. BC எனும் பக்கம் $A'B'$, $A'C'$ எனும் பக்கங்களை P, Q எனும் புள்ளிகளிலும் $B'C'$ எனும் பக்கம் AB AC எனும் பக்கங்களை P'; Q' எனும் புள்ளிகளிலும் வெட்டட்டும்.

A, A' ல் அமையும் கோட்டுக் கற்றைகளின் குறுக்கு விகிதங்கள் சமம்.

$$A'(BC\ PQ) = A'(BC\ B'\ C')$$
$$A(P'\ Q'\ B'\ C') = A(BC\ B'\ C')$$

$ABC\ A'\ B'\ C'$ இருபடி வரையில் அமைவதால்

$$A\ (BC, B'\ C') = A'\ (BC, B'\ C')$$
$$\therefore\ A'\ (BC, PQ) = A\ (PQ, B'C')$$
$$\therefore\ (BC, PQ) = (P'Q', B'C')$$

$\therefore$ $AB, AC, A'\ B', A'\ C'$, எனும் நான்கு கோடுகள் BC, $B'\ C'$ எனும் கோடுகளைச் சமக் குறுக்கு விகிதத்தில் வெட்டுவதால் ஒரு புள்ளி வரையைத் தொடுகின்றன.

குறிப்பு: இதன் இருபான்மைக் கூற்றே இதன் மறுதலை. இதே தேற்றம் வரும்.

கணக்கு: S, S' எனும் இரண்டு இருபடி வரைகள் K, L, M, N எனும் புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. S' க்கு K ல் உள்ள தொடுகோடு S ஐ ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகிறது. அங்கு S க்குள்ள தொடுகோடு மீண்டும் S' ஐத் தொட்டால் இதேபோல L, M, N லும் ஆகும் எனக் காண்க.

6·46. இருபடிவரைக் கற்றை

5 புள்ளிகள் வழி ஒரே ஒரு இருபடி வரை உள்ளது என்றோம். நான்கு புள்ளிகள் குறிப்பிட்ட புள்ளிகளாகக் கொண்டு, 5 வது புள்ளியை மட்டும் மாற்றினால், ஒவ்வொரு 5 வது புள்ளிக்குமென ஒரு இருபடி வரை வரும். இவை யாவற்றிற்கும் நான்கு புள்ளிகள் பொது. இத்தகைய நான்கு புள்ளி இருபடி வரைத் தொகுதியை, இருபடிவரைக் கற்றை (Pencil of conics) என்போம். [கோட்டுக்கற்றை என்பதைப் போல].

இரண்டு இருபடி வரைகள் ஒரு இருபடி வரைக் கோட்டுக் கற்றையை நிச்சயிக்கும். ஏனெனில் அவை வெட்டும் நான்கு புள்ளிகள் வழி மற்ற இருபடி வரைகள் செல்ல வேண்டும்.

இத்தகைய நான்கு புள்ளிகள் வழி மூன்று சோடிக்கோடுகள் உள்ளன. ஆகவே ஒவ்வொரு இருபடிக் கோட்டுக்கற்றையிலும் மூன்று சிதைந்த இருபடி வரைகள் உள்ளன.

தேசார்க்குத்தேற்றப்படி, ஒரு இருபடிக் கோட்டுக்கற்றையில் உள்ள இருபடி வரைகள், ஒவ்வொரு கோட்டையும் சோடிப்புள்ளிகளில் வெட்டி அவை அடுக்குப்புள்ளி வரிசையில் அமைகின்றன.

ஆகவே ஒரு கோடு, கற்றையில் உள்ள இருபடி வரைகளில் இரண்டு வரைகளுக்குத் தொடுகோடாகிறது. தொடும் புள்ளிகள்

இரண்டும் அடுக்குப்புள்ளி வரிசையின் ஒன்று சேர் புள்ளி களாகும். (அதனால்தான் தொடுகிறது.)

6·47. மேற்கூறியவற்றின் இருபான்மை

எந்த மூன்று கோடுகளும் ஒரு புள்ளிவழிச் செல்லாதபடி, நான்கு கோடுகள் அமைந்தால் 5 வது ஒரு கோடு நாம் இச்சைக் கேற்பக்கொள்ள 5 கோடுகளையும் தொடும் ஒரு இருபடி வரை யுள்ளது.

5 வது கோட்டை மாற்ற ஒவ்வொரு கோட்டிற்குமென, நான்கு கோடுகளையும் தொடும் ஒரு இருபடி வரை வரும். இவ்வாறு நான்கு கோட்டு இருபடி வரைத்தொகுதி வருகின்றது.

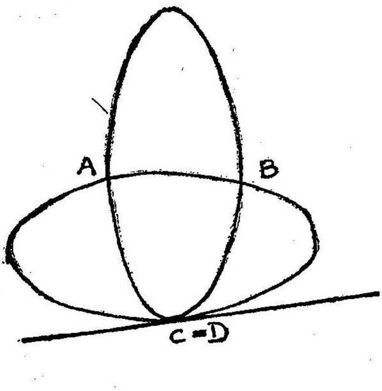
இரண்டு இருபடி வரைகளுக்கு நான்கு பொதுத் தொடுகோடுகள் உள்ளன. இவ்வாறு இவை ஒரு நாற்கோட்டு இருபடிவரை வரிசையை (Range of four line conic) திட்டப்படுத்துகின்றன.

தேசார்க்குத் தேற்றத்தின் இருபான்மையிலிருந்து நாம் அறிவது, ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து நாற்கோட்டு இருபடி வரை ஒவ்வொன்றிற்கும் வரையப்படும் சோடித்தொடு கோடுகள், ஒரு அடுக்குக்கற்றையின் சோடிக்கோடுகளாகும். இந்த அடுக்குக் கற்றைக்கு L வழி இரண்டு ஒன்று சேர் கோடுகள் உள்ளன. ஒவ்வொன்றும், இருபடிவரை வரிசையின் ஒவ்வொன்றுக்கு L ல் தொடு கோடாகும்.

ஆகவே நான்கு கோடுகளைத் தொடுவனவாகவும் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்பனவாகவும், உள்ள இருபடி வரைகள் இரண்டு உள்ளன.

6·48. (i) சிறப்பு நிலைகள் (Special cases)

இருபடிவரைக் கற்றையில், நான்கு புள்ளிகளும் வெவ்வேருக இருக்கவேண்டும் என முதற்கண் கொள்வோம். இதிலிருந்து சில சிறப்பு நிலைகளை வரவழைப்போம். நான்கு புள்ளிகளில், இரண்டு புள்ளிகளோ மேலோ, பொருந்துவனவானுல் இத்தகைய சிறப்பு நிலைகள் வரும்.



படம். 33

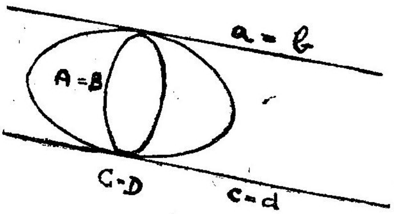
உதாரணமாக, ஒரு கோட்டை C எனும் புள்ளியில் தொடுமாறும், AB எனும் இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லுமாறும் உள்ள இருபடி வரைக்கற்றை உள்ளது. இங்கு D, C யுடன் பொருந்துவதால் CD என்பது கற்றைக்குத் தொடுகோடாகிறது.

இருபான்மையாக ஒரு கோட்டை ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் தொடுமாறும் வேறிரு கோடுகளைத் தொடுவனவாகவும் உள்ள இருபடி வரைகள் நாற்கோட்டு இருபடிவரைகளாகும்.

6·49. (ii) இரட்டைத் தொடுகை (Double Cental)

நான்கு புள்ளிகளில் AB, CD யில் A, B யுடனும் C, D யுடனும் பொருந்தினால் வரும் இருபடி வரைகள் இரட்டைத் தொடுகை உள்ளன எனக் கூறப்படும்.

இருபான்மையாக a, b, c, d எனும் நான்கு கோடுகளில் a, b யுடனும் c, d யுடனும் பொருந்தினால் மேற்கூறிய நிலையே வரும்.



படம். 34

இங்கு மூன்று சிதைந்த இருபடி வரைகள் ஒன்று இருதொடும் புள்ளிகளில் உள்ள தொடு கோடுகள். மற்றிரண்டும் தொடும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு ஆகும்.

6·50. நான்கு புள்ளி இருபடி வரைக் கற்றையைப் பற்றிய சில தேற்றங்கள்.

தேற்றம்: இருபடி வரைக்கற்றையின் ஒவ்வொரு வரைக்கும் உள்ள குறிப்பிட்ட புள்ளியின் இசைக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளாகும்,

A, B, C, D வழி உள்ள இருபடி வரைகளைக் கொள்வோம். X என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியாகுக. A, B, C, D, X வழியுள்ள திட்டமான இருபடிவரை S ஆகுக. x என்பது S க்கு X உள்ள தொடு கோடாகுக. தேசார்க்குத் தேற்றப்படி (*By Desargues Theorem*) x எனும் கோட்டை இருபடி வரைகள் வெட்டும் சோடிப்புள்ளிகள் அடுக்கு வரிசையில் அமையும். அதன் ஒரு ஒன்று சேர் புள்ளி, X. மற்றது Y ஆகுக. $ABCD$ வழியுள்ள ஏதேனும் S' எனும் இருபடிவரை x ஐ PP' எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். PP' அடுக்கு

வரிசையின் சோடிப்புள்ளியாதலால் $(PP', XY) = -1$ ∴ X இன் துணையியப்புள்ளி S' க்கு M ஆகும். S' க்கு Y இன் இசைக் கோடு Y வழிச்செல்லும். இதேபோல மற்ற கற்றையில் உள்ள இருபடி வரைகளின் இசைக்கோடுகள் Y வழிச் செல்வன ஆகும்.

6·51. இதன் இருமரன்மைத் தேற்றம்

நாற்கோட்டு இருபடிவரை வரிசையில் உள்ள ஒவ்வொரு இருபடி வரிசைக்கும், உள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட கோட்டின் இசைப்புள்ளிகள், ஒரு கோட்டில் அமையும்.

[a, b, c d என்பவை நான்கு கோடுகளாகுக; x என்பது குறிப் பிட்ட கோடு. 5 கோடுகளையும் தொடும் ஒரே இருபடிவரை S ஆகுக. x அதனை X எனும் புள்ளியில் தொடட்டும். Y லிருந்து இரு படிவரைகளுக்கு வரையப்படும் சோடித் தொடுகோடுகள் அடுக்குக் கற்றையாகும். இதன் ஒரு ஒன்று சேர் கோடு x ஆகும். மற்ற ஒன்றுசேர் கோடு y ஆகுக. a, b, c, d எனும் நான்கு கோட்டு இருபடிவரைகளில் S' என்பது ஏதேனும் ஒன்ருகுக. அதற்கு X லிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகள் p p' ஆகுக.

∴ X(x y, p p') = − 1 ∴ x y என்பவை s' க்கு துணையியக் கோடுகள். ∴ x இன் இசைப்புள்ளி y இல் அமையும். இது போலவே மற்ற இருபடி வரைகளுக்கு x இன் இசைப்புள்ளி y இல் அமையும்].

6·52. தேற்றம்: இரண்டு இருபடி வரைகளுக்கு X, Y, Z பொது துணையியப் புள்ளிகளானல் இருபடி வரைகள் வெட்டும் நான்கு புள்ளி வழிச் செல்லும் ஒவ்வொரு இருபடிவரைக்கும் அவை துணை யியப் புள்ளிகளாகும்.

S S_2 என்பவை இருபடிவரைகள். X என்பது ஒரு புள்ளி. S_1 S_2 க்கு X இன் இசைக் கோடுகள் X இல் வெட்டட்டும். இவ்வாறு இரண்டு இருபடிவரைகளுக்கு, X எனும் புள்ளியைக் கொண்டால், அத்துடன் இரண்டிற்கும் பொதுத் துணையியப் புள்ளிகளாக அமைய Y எனும் இன்ஞெரு புள்ளியே உள்ளது. XY, எனும் கோடு S_1 S_2 ஐ PP'; QQ' இல் வெட்டட்டும். $(PP, XY) = -1$, $QQ', XY) = -1$ ஆகையால் PP', QQ' நிச்சயிக்கும் அடுக்குப் புள்ளி வரிசையின் ஒன்று சேர் புள்ளிகள் XY ஆகும். S_1, S_2 உடன் அமையும் நாற்புள்ளி இருபடிவரைக் கற்றையில் ஏதேனும் ஒன்று S ஐ XY; RR' ல் வெட்டினுல் RR' ம் இதே அடுக்கு வரிசையில் (தேசார்குத் தேற்றத்தால்) அமையும். ∴ $(XY RR') = -1$ ∴ X, Y, ஒவ்வொரு இருபடிவரைக்கும் துணையியப் புள்ளி

களாகும். இதனல் Xன் இசைக் கோடுகள், எல்லா இருபடிவரைகளுக்கும் Y வழிச்செல்லும். [இது முன்னர் கூறிய தேற்றத்தின் வேறுவகை நிரூபணம்].

6·53. இசைப்புள்ளி இருபடிவரை (Pole locus)

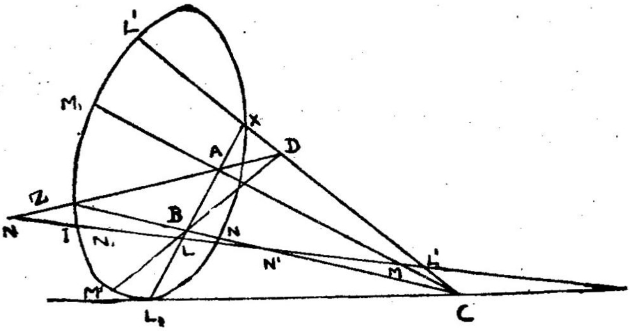
இருபடிவரைக் கற்றையில் உள்ள ஒவ்வொரு வரைக்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட கோட்டின் இசைப்புள்ளிகள் ஒரு இருபடிவரையில் அமையும் எனக் காண்போம்.

$ABCD$ நான்கு புள்ளிகளாகுக. இந்த நாற்கோணத்தின் மூலை முக்கோணம் XYZ ஆகுக. 'l' என்பது குறிப்பிட்ட கோடாகுக.

(i) I, J எனும் புள்ளிகள், கற்றையைச் சேர்ந்த இருபடி வரைகளில் இரண்டை, l எனும் கோடு தொடும் புள்ளிகளாகும். ஆகவே l ன் இசைப் புள்ளிகளாகும்.

(ii) X, Y, Z எனும் மூன்று புள்ளிகள், நான்கு புள்ளிகளால் ஆன நாற்கோணத்தின் மூலைப்புள்ளிகள் (diagonal points) ஆகும். இவை AC, BD; AD, BC, AB, CD எனும் சிதைந்த இருபடி வரைகளுக்கு l ன் இசைப்புள்ளிகளாகும்.

(iii) l எனும் கோடு AB, CD; AC, BD; AD, BC; எனும் கோடுகளை LL', MM', NN', எனும் 6 புள்ளிகளில் வெட்டட்டும்.



படம். 35

$(AB, LL_1) = -1$; $(CD, L'L'_1) = -1$; $(AC, MM_1) = -1$, $(BD, M'M'_1) = -1$, $(AD, NN_1) = -1$, $(BC, N'N_1) = -1$; என 6 புள்ளிகள் L_1, L'_1; M_1, M'_1; N_1, N'_1; இவற்றைக் கொள்க. இந்த 6 புள்ளிகளும் இசைப்புள்ளி இருபடி வரை S' ல் அமைவன என்பதைக் காட்டுவோம்.

CL_1, எனும் கோடு l ஐ Q வில் வெட்டட்டும். QL_1, க்கு C ன் இசையிணைப் புள்ளி R ஆகுக. [படத்தில் காட்டப்படவில்லை] A, B, C, D, R வழி ஒரே இருபடி வரை உள்ளது. நாற்புள்ளி இருபடி வரைக்கற்றையில் இரண்டு வரைகள் l எனும் கோட்டைத் தொடு வன. அவை தொடும் புள்ளிகள் I, J ஆகுக. l எனும் கோட்டில், இருபடி வரைகளில் ஏற்படும் அடுக்குப் புள்ளி வரிசையின் ஒன்று சேர் புள்ளிகளாகும். கற்றையைச் சார்ந்த வேறு ஏதேனும் இருபடி வரை S கோட்டை PP' எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். $\therefore (PP', IJ) = -1$: S எனும் இருபடிவரைக்கு l ன் இசைப்புள்ளி. L ஆகுக. I இன் இசைக்கோடு LJ ஆகும். J ன் இசைக்கோடு LI ஆகும். $\therefore LIJ$ இருபடி வரை S க்கு தன்னிசை முக்கோண மாகும். இவ்வாறு XYZ, LIJ என இரு தன்னிசை முக்கோணங் கள் S எனும் இருபடிக்கு வருகிறது. ஆகவே, X, Y, Z, I, J எனும் ஐந்து புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒரே இருபடி வரை S' ல் L அமை கிறது. இது போன்று கற்றையின் ஒவ்வொரு இருபடிவரைக்கும் l ன் இசைப்புள்ளி இந்த இருபடி வரையில் அமைகிறது.

6·54. பதினொன்று புள்ளி இருபடி வரை (The Eleven Point Conic)

A, B, C, D என்ற நான்கு புள்ளிகளும், l எனும் கோடும் தரப் பட்டுள்ளன. நான்கு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் இருபடி வரை களுக்கு l ன் இசைப்புள்ளிகள் S' எனும் இருபடி வரையில் உள்ளன என்றோம். சிறப்பான 11 புள்ளிகளைச் சுட்டிக் காட்டு வோம்.

$(L_1 Q, RC) = -1$ ஆனதால் L_1 ன் இசைக்கோடு Q வழிச் செல்லும் $(AB, L_1 L) = -1$ ஆனதால் L_1 இசைக்கோடு L வழிச் செல்லும். $\therefore LQ$ வின் இசைப்புள்ளி, ($ABCDR$, என்ற இருபடி வரைக்கு) L_1 ஆகும். ஆகவே L_1 இசைப் புள்ளியியங்குவரை S' ல் அமைய வேண்டும். இதே போல மற்றப்புள்ளிகளும் S' ல் அமைய வேண்டும். இவ்வாறு 11 புள்ளிகள் S' ல் அமைவதைக் காண்கிறோம்.

மீண்டும் கூற.

(i) $ABCD$ வழி உள்ள நாற்புள்ளி இருபடிவரைகளுக்கு ஒரு கோடு l இன் இசைப்புள்ளிகள் ஒரு இருபடி வரையில் அமையும். இதை l எனும் கோட்டின் இசைப்புள்ளியியங்குவரை என்போம்.

(ii) இருபடி வரைகளினல் l ல் ஏற்படும் அடுக்கு வரிசையின் இரு ஒன்றுசேர் புள்ளிகள், இந்த இயங்குவரையில் அமையும்.

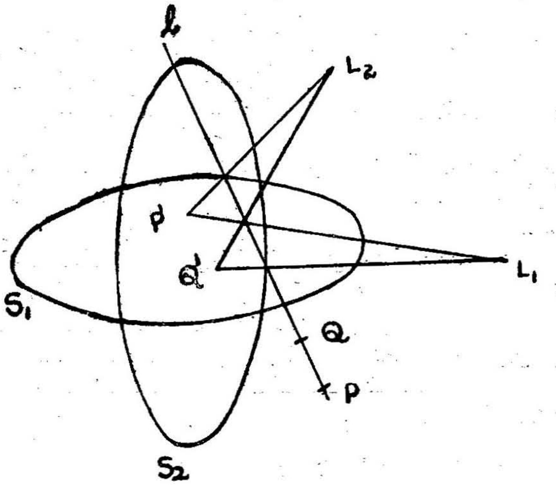
(iii) நான்கு புள்ளிகளாலான நாற்கோணத்தின் மூன்று மூலைப்புள்ளிகள் இதில் அமையும்.

(iv) கோடு பக்கங்களை வெட்டும் புள்ளிகளின், பக்க முனைகளைச் சார்ந்த 6 இசையிணைப் புள்ளிகளும் இந்த இயங்கு வரையில் அமையும்.

ஆகவே, இசைப்புள்ளி இயங்குவரை கோட்டின், 11 புள்ளி இருபடி வரை எனவும் பெயர் பெறும்.

6·55. இசைப் புள்ளியியங்கு வரையை, வேறொரு முறையில் நிறுவுவோம்

ABCD வழிச் செல்லும் இருபடி வரைகளில் S_1, S_2 என்பன இரண்டு வரைகள் ஆகுக. 'l' என்பது கோடு. S_1 க்கு l இன்



படம். 36

இசைப்புள்ளி L_1. S_2 க்கு l இன் இசைப்புள்ளி L_2. கோட்டில் P எனும் ஒரு புள்ளியைக் கொள்க. S_1, S_2 க்கு இதன் இசைக் கோடுகள் P' ல் சந்தித்தால் P, P' இரண்டு வரைகளுக்கும் பொதுத் துணையியப் புள்ளிகளாகும். [ஆகவே நான்கு புள்ளி இருபடி வரைக்கற்றையிலுள்ள ஒவ்வொன்றுக்கும் துணையியப் புள்ளிகளாகும்.] ஆகவே S_1 க்கு P யின் இசைக்கோடு $L_1 P'$. S_2 க்கு P யின் இசைக்கோடு $L_2 P'$.

இதே போல L ல் Q, R, S .... எனப் பல்வேறு புள்ளிகளைக் கொள்ள அவற்றின் பொது துணையியப் புள்ளிகள் முறையே Q', R', S' .... என்றால் அவற்றின் இசைக்கோடுகள் L_1, Q', L_2, Q', $L_1 R', L_2 R'$ .. ஆகும்.

$\therefore \; L_1 (P' Q' R' S \ldots) = (PQRS \ldots) = L_2 (S' Q' R' \ldots)$ என $L_1 L_2$ ல், இரண்டு தொடர்புடைக் கோட்டுக் கற்றைகள் வருகின்றன. ஒத்தகோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் $P' Q' R'$ எனும் புள்ளிகள் வழியாகவும் l இன் இசைப் புள்ளிகள் L_1, L_2 வழியாகவும் ஒரு இருபடி வரை அமைகிறது.

இன்னொரு இருபடிவரை S_3 ஐக் கொண்டால் l இன் இசைப் புள்ளி L_3. எல்லா இருபடிவரைகளுக்கும் P', Q', R' பொதுவானதால், அதே இருபடிவரை L_3 வழியும் செல்லும். இவ்வாறு l ன் ஒவ்வொரு இசைப் புள்ளியும் இந்த இருப்படி இயங்குவரையில் அமைகிறது.

குறிப்பு 1. l இன் இசைப் புள்ளிகள் மட்டுமல்லாது, அதன் மேல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் உள்ள பொதுத் துணையியப் புள்ளியும் அதே இருபடி வரையில் அமைகிறதெனக் காண்கிறோம்.

குறிப்பு 2. (i) l எனும் கோடு AB ஐ L ல் வெட்டட்டும். $(AB, LL_1) = -1$ என L_1 எனும் புள்ளியை AB யில் கொள்க. AB எல்லா இருபடி வரைகளுக்கும் பொதுநாண். ஆகையால், புள்ளி அவையாவற்றிற்கும் L, L_1 துணையியப் புள்ளிகளாகும். L எனும் புள்ளி lல் அமைவதால் L_1 இசைப்புள்ளி யியங்குவரையில் அமையவேண்டும். இதேபோல AC, AD, BC, BD, CD எனும் மற்ற ஐந்து பக்கங்களை l வெட்டும் புள்ளிகளின், பக்கமுனைகளைச் சார்ந்த இசையிணைப் புள்ளிகள் இசையியங்கு வரையில் அமைய வேண்டும்.

(ii) l எனும் கோட்டில் நாற்புள்ளி இருபடி வரைகள் ஒவ்வொன்றும் அடுக்கு வரிசையில் அமையும் சோடிப்புள்ளிகளில்— MM', NN', — என வெட்டுகின்றன. அடுக்கு வரிசையின் ஒன்று சேர் புள்ளிகள் EF ஆனால் $(MM ; EF) = -1$; $(NN; EF) = -1$...... எனவாகும். ஒவ்வொரு வரைக்கு E, F ஒன்று மற்றதன் துணையியப் புள்ளிகளாகும். ஆகவே இவ்விரண்டும் இசைப்புள்ளி இயங்கு வரையில் அமைகின்றன. [l எனும் கோடு, இந்த வரையை வெட்டும் புள்ளிகள் இவை].

(iii) l எனும் கோடு $ABCD$ ன் மூலை முக்கோணம் XYZ ன் பக்கம் YZ ஐ K ல் வெட்டட்டும்.

எல்லா இருபடி வரைகளுக்கும் XZ என்பது Yன் இசைக் கோடு. அது K வழிச் செல்லுகிறது. ∴ Kன் துணையியப்புள்ளி Y, ஆகவே இசைப் புள்ளியங்கு வரையில் Y அமையவேண்டும். இது போன்று X, Z உம் அமைய வேண்டும். அதாவது மூலப் புள்ளிகள் மூன்றும் அமையவேண்டும். இவ்வாறு இசைப்புள்ளி இயங்கு வரையில் (Pole locus) 11 சிறப்புப் புள்ளிகளைக் காண்கிறோம்.

6·56. இசைப்புள்ளி இயங்கு வரையின் இருபான்மை அல்லது இசைக்கோட்டுத் தழுவுவரை (Dual of pole lucus or polar envelope)

(i) நான்கு கோட்டு இருபடி வரைகள் ஒவ்வொன்றுக்குமுள்ள, ஒரு புள்ளியின் இசைக் கோடுகள் ஒரு இருபடி வரையைத் தழுவும்.

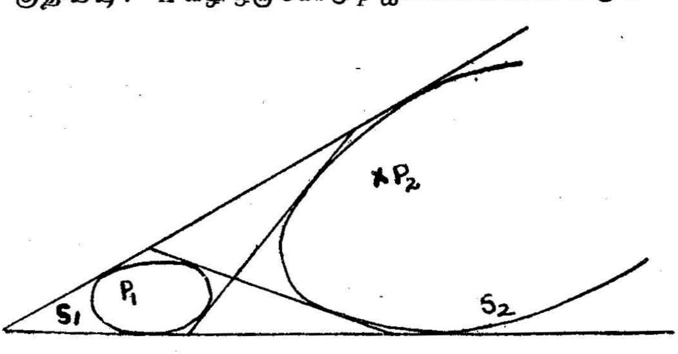
(ii) இந்த இருபடிவரை சிறப்பான 11 கோடுகளைத் தொடும். அவை யாவன.

(a) $abcd$ என்ற நாற்கரத்தின் மூல முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள்.

(b) X எனும் அந்தப் புள்ளியிலிருந்து நாற்கோட்டு இருபடி ஒவ்வொன்றுக்குமுள்ள சோடித் தொடுகோடுகள் அடுக்குக் கோட்டுக் கற்றையாகும். இந்தக் கற்றையின் ஒன்று சேர்க் கோடுகள் இரண்டும் இசைக்கோட்டுத் தழுவு வரையைத் தொடும்.

(c) X எனும் அந்தப் புள்ளியை, நான்கு கோட்டு நாற்கரத்தின் 6 முனைகளில் ஒன்றுடன் சேர்க்கவும். அந்த முனையில் சேரும் இரு பக்கங்களுக்கு, X வழியுள்ள கோட்டின் இசையிணைக்கோடும், தழுவுவரையைத் தொடும். இவ்வாறு 6 முனைகளுக்கு, 6 தொடு கோடுகள் உள்ளன. இவ்வாறு $3+2+6=11$ தொடு கோடுகள் இசைக் கோட்டுத் தழுவுவரைக்குக் குறிப்பாக உள்ளன.

குறிப்பு: X வழி ஒரு கோடு p ஐக் கொள்க. நான்கு கோட்டு



படம். 38

இருபடி வரைகள் S_1 S_2 க்கு, p ன் இசைப் புள்ளிகள் P_1, P_2 ஆகுக, அப்போது P_1 P_2 — P' எனும் கோடு — இரண்டு இருபடி வரைகளுக்கும் பொதுவான துணையியக் கோடு ஆகும். இவை எல்லா நான்கு கோட்டு இருபடி வரைகளுக்கும் பொதுவான p ன் துணையியக் கோடு ஆகும். இதுவும் தழுவுவரையைத் தொடும். ஆகவே X வழியுள்ள ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் பொதுத் துணையியக் கோடுகள் தழுவுவரையைத் தொடுவனவாகும்.

பயிற்சி

1. PP', QQ' என்பவை ஒரு இருபடிவரையின் இருநாண்கள் இவை T எனும் புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. வரையில் A எனும், புள்ளியில் AS என்பது தொடுகோடு. AP, AP', AQ, AQ'; AT AS; என்பவை அடுக்குக்கோட்டுக் கற்றைகள் என நிறுவுக.

2. நான்கு கோடுகளைத் தொடுவன ஆகவும் ஒரு புள்ளி வழிச்செல்வதாகவும் உள்ள இருபடி வரைகள் இரண்டு உள்ளன என நிறுவுக (தேசார்குத் தேற்றம் பயன்படுத்தவும்).

3. ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழிச்செல்வதாகவும், ஒரு கோட்டை அதன் மேல் உள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் தொடுவதாகவும், மற்றிரு கோடுகளைத் தொடுவதாகவும் உள்ள இருபடி வரைகள் இரண்டேயுள்ளன என நிறுவுக. (தேசார்குத் தேற்றம் பயன்படுத்தவும்).

4. A,B,C என்பவை மூன்று குறிப்பிட்ட புள்ளிகள். l எனும் கோட்டில் அடுக்கு வரிசையில் புள்ளிகள் உள்ளன. A, B,C, எனும் புள்ளிகள் வழியாகவும், அடுக்குப்புள்ளி வரிசையில் உள்ள சோடிப் புள்ளிகள் வழியாகவும் உள்ள பல இருபடி வரைகள் யாவும், D எனும் மற்ருெரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழிச்செல்லும் என நிறுவுக. (தேசார்குத் தேற்றம் பயன்படுத்தவும்.)

(கீழ்வரும் கணக்குகளில் பாஸ்கல், பிரயன்கன் தேற்றம் பயன்படும்).

5. ஐந்து குறிப்பிட்ட புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் ஒரு இருபடிவரைக்கு அவற்றுள் ஒரு புள்ளியில் உள்ள தொடுகோடு காணும் வகை கூறுக.

6. ஐந்து கோடுகளைத்தொடும் ஒரு இருபடி வரைக்கு அவற்றுள் ஒரு கோடு தொடும் புள்ளியைக் காணும் வழி கூறுக.

7. ஒரு இருபடி வரையில் ஒரு நாற்கோணம் வரையப்பட்டுள்ளது. அதன் முனைகளில் உள்ள தொடுகோடுகள், மூல முக்கோணத்தின் பக்கங்களில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

8. ஒரு முக்கோணம் ஒரு இருபடிவரையைச் சுற்றி வரையப்பட்டால், அதன் பக்கங்கள் வரையைத் தொடும் புள்ளிகளை, எதிர் முனைகளுடன் சேர்க்கும் கோடுகள் ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகள் என நிறுவுக.

9. ஏழாவது கணக்கின் இருபான்மைத் தேற்றத்தை எழுதுக.

10. எட்டாவது கணக்கின் இருபான்மைத் தேற்றத்தை எழுதுக.

7. தனிப்புள்ளிகளும், தனிக்கோடும்
(Absolute Points and Line)

7·1. வீழல் முறை வரைகணிதத்தைப் பொதுவரை கணித மாக விவரித்தோம். வீழல் வெளியில் (in projective space) ஒரு தளத்தில் உள்ள கோடுகளிடையோ, புள்ளிகளிடையோ தனி முறையில் வித்தியாசம் ஏற்படுத்துவதில்லை. ஒரு கோட்டுக்கோ, ஒரு சில புள்ளிகளுக்கோ சிறப்பான பண்புகள் ஏதும் கற்பிக்க வில்லை. இவ்வாறு அடைந்த தேற்றங்கள் மிக விரிவானவை.

இத்தகைய வீழல்முறை வரை கணிதத் தேற்றங்களிலிருந்து 'யூக்லித வெளியில்' (*Euclidean space*) ஒரு தளத்தில் சிறப்பான பண்புகளையுடைய தேற்றங்கள் காணும் முறையைக் காணு வோம்.

'யூக்லித' வரைகணிதத்தில் 'இணைகோடுகள்' 'குத்துக்கோடு கள்' 'கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி' 'தூரங்கள்' எனப் பல கருத்துக்கள் உள்ளன. வீழல்முறை வரைகணிதத்தில் எத்தகைய மாறுதல்கள் புகுத்தினல் யூக்லித முறை வரை கணிதம் வரும் என்பதைக் காண்போம். முதலில் 'இணைகோடுகள்' 'குத்துக் கோடுகள்' என்பவற்றை எவ்வாறு அடைவது என்பதைப் பார்ப்போம்.

7·2. தனிக் கோடும், தனிப்புள்ளிகளும்

வீழல் வெளித்தளத்தில் ஏதேனுமொரு கோட்டை 'தனிக் கோடு' என அழைப்போம். அதில் உள்ள இரு வெவ்வேறு புள்ளிகள் *I*, *J* வைத் தனிப்புள்ளிகள் (*Absolute points*) என்போம். தளத்தை, யூக்லித வெளித்தளம் என்று கொண்டால், தனிக்கோடு என்பது கந்தழிக்கோடு (*Line at infinity*) ஆகும். தனிப்புள்ளிகள் என்பவை 'வட்டப்புள்ளிகள்' (*Circular points*) எனப் பெயர் பெறும். ஆனல் இங்கு எந்தக் கோட்டை வேண்டு மாயினும் தனிக்கோடு என்று கொள்ளலாம். கொண்டபின்

அதற்கென சில பண்புகளைக் கற்பிப்போம். இதன்வழி 'இணை கோடு' 'குத்துக்கோடு' 'நடுப்புள்ளி', 'வட்டம்' என்பன போன்ற கருத்துக்களை சாதாரண வரை கணிதத்தில் காண்பதைவிட விரி வான பொருளில் விளக்குவோம்.

(i) தனிக்கோட்டில் சந்திக்கும் இரண்டு கோடுகள் இணை கோடுகள் எனப்படும். ஆகவே தளத்தில் உள்ள ஒரு கோடு 'தனிக்கோட்டை' K எனும் புள்ளியில் சந்திக்கட்டும். A என்பது ஏதேனும் புள்ளியாகுக. A, K வழி ஒரே கோடு உள்ளது. ஆத லால் ஒரு கோட்டிற்கு ஒரு புள்ளி வழி ஒரே இணைகோடு உள்ளது என்பதைக் காண்கிறோம்.

(ii) A, B எனும் இருபுள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு தனிக் கோட்டை D எனும் புள்ளியில் வெட்டட்டும். AB க்கு D ன் இசை இணைப்புள்ளி C ஆகுக. அப்போது AB யின் நடுப்புள்ளி C எனப் படும்.

(iii) (*a*) இரண்டு கோடுகள் 'தனிக்கோட்டை' LM எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். $(LM, IJ) = -1$ என்றால் இரண்டு கோடுகள் ஒன்றற்கொன்று 'குத்துக்கோடுகள்' எனப்படும். அதாவது A ஒரு புள்ளி. $A\,(LM, IJ) = -1$ என்றால் AL, AM, என்பவை குத்துக் கோடுகளாகும்.

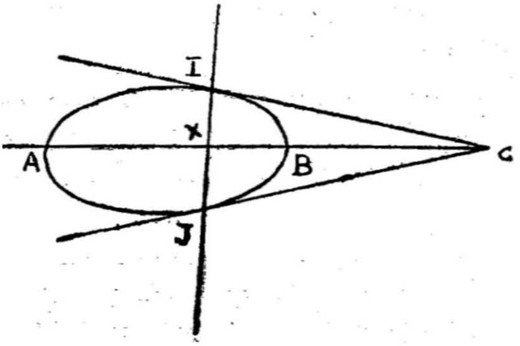
(*b*) A வழியுள்ள ஒரு கோடு தனிக்கோட்டை I ல் சந்தித்தால் அதற்குக் குத்துக்கோடு யாது? இங்கு L எனும் புள்ளி I யுடன் பொருந்துகிறது. A, AJ க்கு AI யின் இசை யிணைக்கோடு I ஆகும். ∴ AJ என்பது சுயக்குத்துக் கோடாகும். ஆகவே I வழிச் செல்லும் கோடுகள் சுயக்குத்துக் கோடுகள் (Self perpendicular). அதே போல J வழிக் கோடுகளும் சுயக்குத்துக் கோடுகளாகும்.

(iv) தனிக்கோட்டில், தனிப்புள்ளிகளின், சோடி இசைப் பிரிவுப் புள்ளிகள், அடுக்கு வரிசையின் சோடிப் புள்ளிகளாகும். இவைகளை ஏதேனும் ஒரு புள்ளியுடன் சேர்க்கவரும் அடுக்குக் கோட்டுக் கற்றையில் சோடிக்கோடுகள் குத்தாக அமையும். இவ்வாறு அமையும் அடுக்குக் கோட்டுக் கற்றைக்கு 'குத்தடுக்குக் கோட்டுக் கற்றை' (*orthogonal involution pencil*) எனப் பெய ராகும். எனவே குத்தடுக்குக் கோட்டுக் கற்றையில் ஒன்று சேர் கோடுகள், புள்ளி வழியுள்ள இருசுயக் குத்துக்கோடுகளாகும். இந்தக் கற்றைத் 'தனிகோட்டில்' ஏற்படுத்தும் அடுக்குப்புள்ளி வரிசையில் 'ஒன்று சேர் புள்ளிகள்' தனிப்புள்ளிகளாகும்.

७·3. வட்டம்

தனிப்புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் இருபடிவரையை 'வட்டம்' என அழைப்போம்.

ஐந்து புள்ளிகள் வழி ஒரே இருபடிவரையுள்ளது என்றோம். 'வட்டங்கள்' யாவும் இரண்டு தனிப்புள்ளி வழியாகச் செல்ல வேண்டும். ஆகவே தளத்தில் மூன்று புள்ளிகள் வழி ஒரே வட்டம் உள்ளது எனக் காண்கிறோம்.



படம். 39

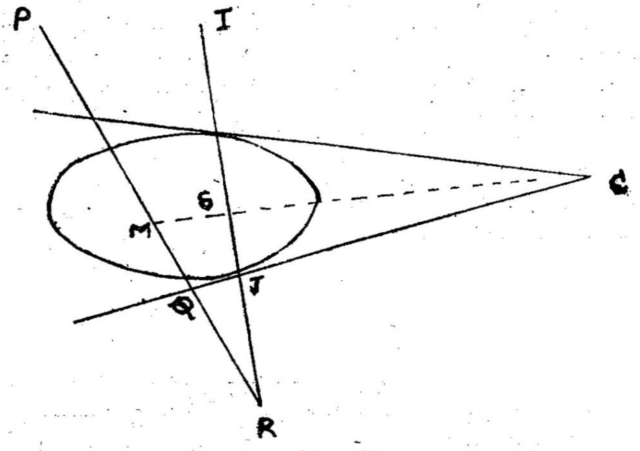
வட்டமையம் என்பது, தனிக்கோட்டின் வட்டத்தின் இசைப் புள்ளியாகும்.

இந்த மையத்தின் வழி—அதாவது வட்டத்திற்குத் தனிக் கோட்டின் இசைப்புள்ளிவழி—உள்ள கோடுகள் வட்டத்தின் விட்டங்கள் எனப் பெயர்பெறும்.

வட்டமையம் C ஆகுக. அதன் வழி விட்டம் AB ஆகுக. தனிக் கோட்டை X ல் வெட்டட்டும். தனிக்கோட்டில் இசைப்புள்ளி C ஆதலால் $(CX, AB) = -1$ ஆகும். நமது நடுப்புள்ளியின். விளக்கப் படி AB யின் நடுப்புள்ளி C ஆகும். ஆகவே வட்டமையம், அதன் வழி உள்ள நாண்களின் மையப்புள்ளியாகும் எனக் காண்கிறோம்.

AB, IJ என்பவை துணையிய நாண்கள். [IJ ன் இசைப்புள்ளி C, AB யில் இருப்பதால்]. P என்பது வட்டத்தின் மேல் ஏதேனும் புள்ளியானல் $P\,(AB, IJ) = -1$: ஆகவே PA, PB ஒன்றற்கொன்று குத்துக் கோடுகளாகும். [அரை வட்டத்தில் உள்ள கோணம் செங்கோணம் எனும் சாதாரண யூக்லித வரை கணிதத்தில் வரும் தேற்றமாகும்.]

PQ எனும் வட்டநாண் *IJ* எனும் தனிக்கோட்டை *R*ல் சந்திக்கட்டும். *PQ* விற்கு *R*ன் இசையிணைப் புள்ளி *M* ஆகுக. அப்போது



படம். 40

CM எனும் கோடு *R*ன் இசைக்கோடு ஆகும் *CM* தனிக்கோட்டை *S* ல் சந்தித்தால் $(SR, IJ) = -1$.

$\therefore$ $M(SR, IJ) = -1$. $\therefore$ *MS*, *MR* எனும் கோடுகள் குத்துக் கோடாகும். அதாவது ஒரு வட்ட நாணும், **அதன் நடுப்புள்ளியை வட்ட மையத்துடன் சேர்க்கும் கோடும் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும்.**

MC இவ்வாறு *PQ* க்கு நடுக்குத்துக் கோடு (Perpendicular bisector) ஆகிறது. ஆகவே *ABC* எனும் மூன்று புள்ளிகள் வழி உள்ள ஒரே வட்டத்தின் மையம், *AB*, *BC*, *CA* எனும் நாண்களின் (அல்லது பக்கங்களின்) 'நடுக்குத்துக் கோடுகளில் அமைகிறது. நடுக்குத்துக் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளாகின்றன. அந்த ஒன்று சேர் புள்ளி,—வட்டத்தின் மையம் — *ABC* என்ற முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் எனப்படும்.

PQ எனும் நாண், வட்டத்திற்குத் தொடு கோடானல், *P*, *Q* எனும் புள்ளிகள் *P*,*P* எனும் பொருந்தும் (Coincident) புள்ளிகளாகும். நாணின் நடுப்புள்ளி *M* ம் *P* யுடன் பொருந்தும்.

CM, *PQ* குத்துக் கோடுகள் என்றதால் இங்கு *C*, *P* *PP* குத்துக் கோடுகள் எனவாகிறது. அதாவது வட்டத்திற்குள்ள **தொடு கோடும் தொடும் புள்ளியை மையத்துடன் சேர்க்கும் கோடும் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும்.**

PQ எனும் வட்டநாண், தனிக்கோடு IJ வை R ல் சந்திக்கிறது. PQ வின் நடுப்புள்ளி M. $\therefore (MR, PQ) = -1$ $\therefore R$ ன் இசைக்கோடு M வழிச்செல்லும். வட்டமையம் C ன் இசைக்கோடு R வழிச் செல்வதால், R ன் இசைக்கோடு C வழியும் செல்லும். $\therefore R$ இன் இசைக்கோடு CM; P, Q, வின் தொடுகோடுகள் T ல் சந்தித்தால் PQ வின் இசைப்புள்ளி T; PQR வழிச் செல்வதால் R ன் இசைக் கோடு T வழிச் செல்ல வேண்டும். $\therefore CM$ எனும் கோட்டில் T அமைகிறது.

$\therefore$ PQ வட்டத்திற்கு நாண் ஆனல் அதன் இசைப்புள்ளியையும், வட்டமையத்தையும் சேர்க்கும் கோடு நாணின் நடுக்குத்துக் கோடாகும்.

7·4. குத்துவட்டங்கள்

இரண்டு இருபடி வரைகள் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. ஆகவே இரண்டு வட்டங்கள் I, J எனும் தனிப் புள்ளிகளில் மட்டுமன்றி PQ எனும் வேறு இரு புள்ளிகளிலும் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

P ல் இரு வட்டங்களுக்கு உள்ள தொடு கோடுகள் குத்தானல், Q வில் அவைகளுக்குள்ள தொடு கோடுகளும் குத்தாகும் எனக் காட்டுவோம். இத்தகைய வட்டங்கள் குத்துவட்டங்கள் (Orthogonal Circles) எனப்படும்.

S_1 என்ற வட்டத்திற்கு P, Q வில் உள்ள தொடுகோடுகள் T ல் வெட்டட்டும். PQ வின் நடுக் குத்துக்கோட்டில் T உள்ளது. S_2 எனும் வட்டத்திற்கும் PQ, நாண் ஆனதால், இந்த நடுக்குத்துக் கோடு S_1, S_2 எனும் இரு வட்டங்களின் மையங்கள் வழியுள்ள கோடாகும். P ல் இரு வட்டங்களுக்கும் உள்ள தொடு கோடுகள் குத்துக் கோடுகளாகுக. $\therefore P$ ல் S_1 க்கு உள்ள தொடு கோடு S_2 ன் மையம் வழிச் செல்லும் விட்டமாகும். [S_2 ன் தொடு கோட்டுக்குக் குத்தாவதால்,] இரு மையங்கள் வழியுள்ள கோட்டில் P, Q வில் உள்ள தொடு கோடுகள் T எனும் புள்ளியில் சந்திக்கிறது என்றோம். $\therefore T$ என்பது S_2 வின் மையமாகும். அதாவது S_1 க்கு Q வில் உள்ள தொடு கோடும் S_2 வின் விட்ட மாகும். ஆகையால், S_1 S_2 க்கு Q வில் உள்ள தொடு கோடு களும் குத்துக் கோடுகளாகும்.

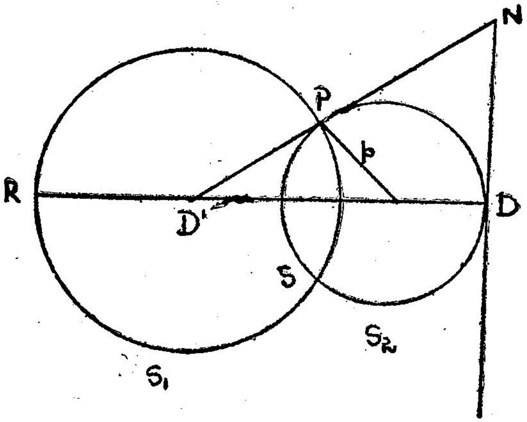
இரு வட்டங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் (தனிப் புள்ளிகளைத் தவிர, ஏனைய) புள்ளிகளில் ஒன்றன் தொடு கோடு மற்றதன் மையம் வழிச் செல்லும்,

7·5. வட்டத்தின் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் (Inverse points of a circle)

DD' என்பது ஒரு வட்டத்தின் விட்ட நாண் முனைகள். அதில் HH' எனும் DD'ன் இசைப் பிரிவுப் புள்ளிகள் [அதாவது $(DD', HH')=-1$] என்றால் அவைகள் வட்டத்தின் தன்மாற்றுப் புள்ளிகள் எனப்படும்.

இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றற்கொன்று குத்தானால் ஒன்றன் விட்டத்தை மற்றது, முதல் வட்டத்தின் தன்மாற்றுப் புள்ளிகளில் வெட்டும்.

S_1 எனும் வட்டத்தின் விட்டம் DD' ஐ S_2 எனும் வட்டம் R S ல் வெட்டுகிறது. இரண்டும் குத்து வட்டங்கள். இரண்டிற்குப்



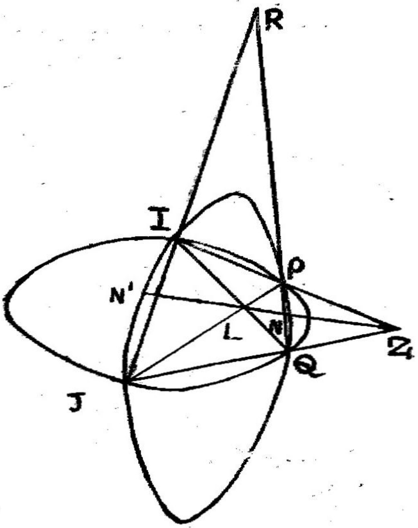
படம். 41

பொதுவான ஒரு புள்ளி P. வட்டம் S_2 க்கு P யில் தொடுகோடு Pஆகுக. p எனும் கோட்டை P யில் தொடும் வட்டங்களின் தொகுதி {(Pencil of circles) ஏனெனில் IP, P, I எனும் நான்கு புள்ளி இரு படிவரை என இவற்றைக் கருதலாம்} RS எனும் கோட்டை அடுக்கு வரிசையில் உள்ள சோடிப் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. வட்டம் S_1 க்கு P, D எனும் புள்ளிகளில் உள்ள தொடு கோடுகள் முறையே p, DD' எனும் கோடுகளுக்குக் குத்தானவை. அவை N எனும் புள்ளியில் சந்தித்தால், $NP=ND$ ஆகையால் p ஐ P எனும் புள்ளியில் தொடுமாறும் DD' ஐ D எனும் புள்ளியில் தொடுமாறும் உள்ள வட்டத்தின் மையம் N. ஆகையால் இந்த வட்டம் முன்சொன்ன வட்டத் தொகுதியைச் சேரும். ஆகையால்

RS ல் ஏற்படும் அடுக்கு வரிசைக்கு *D* ஒன்று சேர் புள்ளியாகும். இதே போல் *D′* ம் ஒன்று சேர் புள்ளியாகும். *R*, *S* என்பது இந்த அடுக்கு வரிசையில் ஒரு சோடிப் புள்ளி ஆனதால் $(RS, DD') = -1$. ∴ *R*, *S* என்பது வட்டம் S_1 க்குத் தன் மாற்றுப் புள்ளிகளாகும்.

7·6. ஓரச்சு வட்டங்கள் (Coaxal Circles)

இரண்டு வட்டங்கள் தனிப்புள்ளிகளைத் தவிர, வேறு இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்ளும். இந்த இரண்டு புள்ளிகள் வழிச்



படம். 42

செல்லும் வட்டங்களின் தொகுதி 'ஓரச்சு வட்டங்கள்' (*Coaxal circles*) எனப்படும். மூன்றுவது புள்ளி வழிச்செல்வதாகவும், இருவட்டங்கள் நிச்சயிக்கும் ஓரச்சுவட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்த தாகவுமுள்ள வட்டம் ஒன்றேயிருக்கும். ஏனெனில் தனிப்புள்ளி இரண்டுடன் சேர்ந்து 5 புள்ளி வழிச்செல்லும் இருபடிவரை யானதால்.

இரண்டு வட்டங்கள் *P*, *Q* எனும் புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொண்டால், ஓரச்சுவட்டத் தொகுதியின் அச்சு (Radical axis) *PQ* வழிக்கோடாகும். [தொகுதியைச் சேர்ந்த ஏதேனும் இரண்டு வட்டங்களின் அச்சும் இதுவே.]

PI, QJ எனும் கோடுகள் Z லும், PJ, QI எனும் கோடுகள் L' லும் சந்தித்தால், Z, L' எனும் புள்ளிகள் ஓரச்சுவட்டத் தொகுதியின் 'எல்லைப்புள்ளிகள்' (*limiting points*) எனப்படும். PQ எனும் கோடும் IJ எனும் கோடும் R எனும் புள்ளியில் சந்தித்தால் $ZL'R$ எனும் முக்கோணம் $PQIJ$ எனும் நாற்கோணத்தின் மூலைமுக் கோணமாவதால், ஒவ்வொரு வட்டத்திற்கும் (ஓரச்சு வட்டத் தைச் சேர்ந்தவை) இந்த முக்கோணம் தன்னிசை முக்கோணமாகும்.

(i) எல்லா வட்டங்களுக்கும் ZL' இசைப்புள்ளி R, IJ யில் இருப்பதால், எல்லா வட்டங்களுக்கும் IJ ன் இசைப்புள்ளிகள்-அதாவது வட்டங்களின் மையங்கள் $ZQ'L'$ல் அமையும். இவ்வாறாக ஓரச்சு வட்டங்களின் மையங்கள் ஒருகோடமைபவை.

(ii) ZL' எனும் கோடு PQ வை N லும் IJ ஐ N' லும் சந்திக் கட்டும், அப்போது $(NN'\ ZL') = -1$ ஆனதாலும் N', தனிக்கோட் டில் இருப்பதாலும், அதன் இசையிணைப்புள்ளி N, LL' ன் நடுப் புள்ளியாகும்.

(iii) $(IJ, N'R) = -1$ எனத் தனிக்கோட்டில் அமைவதால் $N(IJ, NR',) = -1$ $\therefore$ $NN'NR$ குத்துக்கோடுகளாகும். அதாவது LL'ம் வட்டத்தொகுதியின் அச்சு PQ வும் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும்.

(iv) PQ ஆனது LL' க்குக் குத்துக் கோடானதால், LL' வழிச் செல்லும் ஓரச்சு வட்டங்களின் மையங்கள் PQ வில் அமையும். அதாவது இவை ZL', IJ எனும் நாற்புள்ளி இருபடி வரைகள். இதன் மூலைமுக்கோணம் PQN'; ஆகவே இந்த ஓரச்சு வட்டங் களின் எல்லைப்புள்ளிகள் PQ வாகும்.

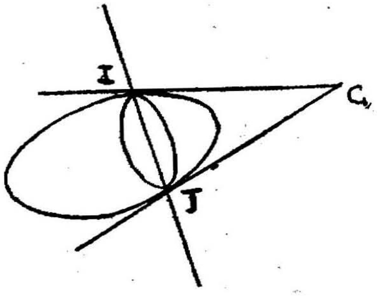
(v) ZL' ஐ எல்லைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட வட்டத்தொகுதி யில் (அதாவது PQ வழிச் செல்லும் வட்டங்களில்) ஒன்று ZL' ஐ AA' இல் வெட்டினுல் Z, L' அதற்குத் துணையியப் புள்ளிகள். ஆகவே $(ZL', AA') = -1$ $\therefore$ Z, L' இந்த வட்டத்திற்குத் தன் மாற்றுப் புள்ளிகளாகும். இவ்வாறு P, Q வழி ஓரச்சுவட்டம் ஒவ்வொன்றுக்கும் Z, L' தன்மாற்றுப் புள்ளிகளாகும்.

(vi) ஆகவே ZL' வழிச் செல்லும் ஒவ்வொரு வட்டமும், PQ வழிச் செல்லும் ஒவ்வொரு வட்டத்திற்கும் குத்தாகும்.

௭·௭. பொது மைய வட்டங்கள்

ஒரே புள்ளியை மையமாகவுடைய வட்டங்கள், பொது மைய வட்டங்கள் எனப்படும். வட்டமையம், தொடு கோட்டின் இசைப் புள்ளி வட்டங்கள் I, J வழிச் செல்லும் இருபடிவரைகள். CI, CJ

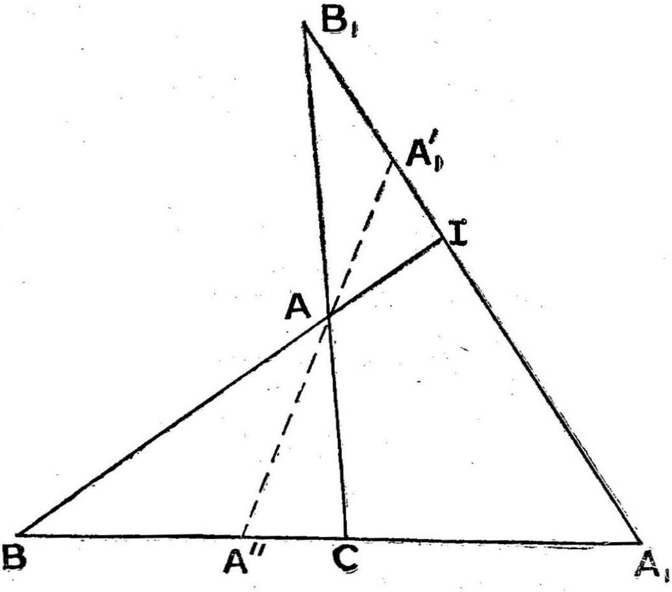
வட்டத்தின் தொடு கோடுகளாகும். எல்லா வட்டங்களுக்கும் C மையமானுல் CI, CJ எல்லா வட்டங்களுக்கும் I, J என்ற புள்ளிகளில் தொடு கோடுகள். நான்கு புள்ளிகள் I, I பொருந்து வனவும் I, I பொருந்து வனவுமாகும். ஆகவே பொதுமைய வட்டங்கள் என்பவை I, I எனும் தனிப் புள்ளிகளில் இரட்டைத் தொடுகை (Double Contact) உள்ள இருபடி வரைகளாகும்.



படம். 43

ஆகவே இவையும் ஓரச்சு வட்டங்கள் எனலாம்; தனிக்கோடு ஓரச்சாகிறது. இரட்டைத் தொடுகை உள்ள இருபடி வரைகளில் பொது நாண் தனிக்கோடு என்று சொன்னுல் அவை பொது மைய வட்டங்கள் எனப் பெயர் பெறுகின்றன.

7·8. முக்கோணத்தின் ஆயிலர் கோடு (The Eular line of a triangle)



படம். 44

ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டமையம், மையக்கோட்டு சந்தி, குத்து மையம் எனும் மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோடமைபவை. அந்தக் கோட்டை ஆயிலர் கோடு (Euler line) என அழைப்பார்கள்.

(i) ***குத்துமையம்:*** ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் BC, CA, AB தனிக்கோடு IJ ஐ $A, B, C,$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும்.

$A', B', C',$ என்பவை முறையே IJக்கு $A, B, C,$ இவற்றின் இசையிணைப் புள்ளிகளாகுக.

AA', BC ஐ A'' லும், BB', CA ஐ B'' லும், CC', AB ஐ C'' லும் வெட்டட்டும்.

$\therefore \quad A''(A, A', IJ) = -1$

$\therefore \quad A''A$ ம் $A''A'_1$ ம் குத்துக்கோடுகள்

$\therefore \quad BC$ ம் AA'' ம் குத்துக்கோடுகள்

இதேபோல CA ம் BB'' ம் குத்துக்கோடுகள்

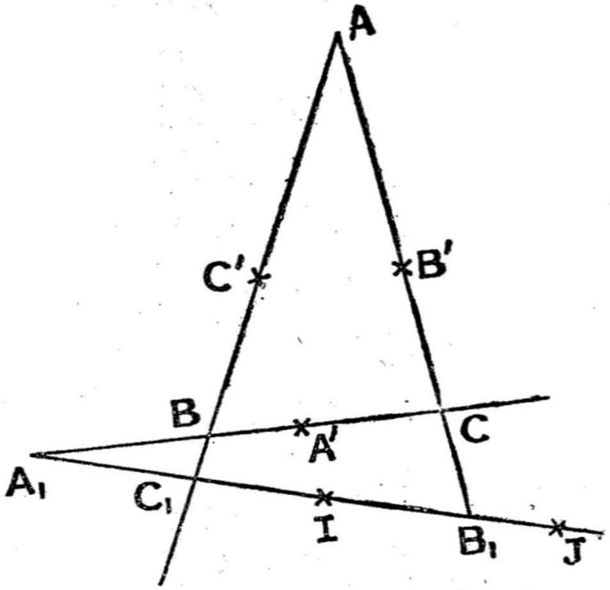
AB ம் CC'' ம் குத்துக்கோடுகள்

AA'', BB'' எனும் கோடுகள் H ல் சந்திக்கட்டும், $ABCH$ ஒரு நாற்கோணம். BC, AH எனும் பக்கங்கள் $A_1 A'_1$ லும் இதேபோல CA, BH எனும் பக்கங்கள் $B_1 B'_1$ லும் வெட்டுகின்றன. இந்த இருசோடிப் புள்ளிகள், IJ எனும் தனிக்கோட்டில் நாற்கோணத்தின் பக்கங்கள் ஏற்படுத்தும் அடுக்கு வரிசையை நிச்சயிக்கின்றன. இதே அடுக்கு வரிசையைச் சேர்ந்தவை $C_1 C_1'$ ம். இதனுல் AB, CH எனும் பக்கத்தில் C_1 உள்ளது. ஆகவே CH எனும் பக்கத்தில் C_1' இருக்கவேண்டும். $\therefore CH$ எனும் பக்கம் C'' வழிச் செல்லவேண்டும்.

இவ்வாறு முக்கோணத்தின் முனைகளிலிருந்து எதிர்ப்பக்கங்களுக்குள்ள குத்துக்கோடுகள் H எனும் புள்ளி வழிச்செல்வன. H என்பது முக்கோணத்தின் குத்துமையமாகும்.

(ii) BC, CA, AB எனும் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் A', B', C' ஆகுக. $\therefore (AC, B' B_1) = (AB, C' C_1) = -1.$ A பொதுப் புள்ளியாதலால் $BC, B'C', B_1 C_1$ ஒரு புள்ளி வழிக் கோடாகும். அதாவது $BC. B'C', A_1$ ல் சந்திக்கின்றன. இவ்வாறு இரு பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு மூன்ருவது பக்கத்திற்கு இணையாகும்.

ABC, *A' B' C'* என்ற இரு முக்கோணங்களில் *BC*, *B' C'*; *CA*, *C' A'*; *AB A' B'*; எனும் ஒத்த பக்கங்கள் சந்திக்கும் புள்ளி



படம். 45

கள் A_1, B_1, C_1 தனிக்கோட்டில் கோடமைப்புள்ளிகள். தனிக் கோடு பார்வை அச்சு (axis of perspective) ஆனதால் *AA'*, *BB'*, *CC'* எனும் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளாகும். ஒரு புள்ளி (*G*) முக்கோணத்தின் மையக்கோட்டு சந்தி (Centroid) எனப்படும்.

(iii) *BC*, *CA*, *AB* எனும் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் *A' B' C'* ; *BC* க்கு *A'* ல் உள்ள குத்துக்கோடு *B' C'* க்கும் குத்தாகும் (*BC* யும் *B' C'* ம் இணையாதலால்). ஆகவே *ABC* என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுக்குத்துக் கோடுகள் பக்க நடுப்புள்ளி முக்கோணம் *A' B' C'* ல் முனைகளிலிருந்து எதிர்ப்பக்கங்களுக்குக் குத்தாக அமைகின்றன. ஆகவே *A' B' C'* யின் குத்துமையம் *S* ல் சந்திக்கின்றன.

(iv) *IJ* க்கு *A* இன் இசையிணைப் புள்ளி A'_1 ; B_1 இன் இசையிணைப்புள்ளி B_1; C_1 ன் இசையிணைப் புள்ளி C_1' ; [*BC*, *IJ* வெட்டும்புள்ளி *A* ; இதேபோல *CA*, *IJ* வெட்டும் புள்ளி B_1 ; *AB*, *IJ*, வெட்டும்புள்ளி C_1].

$BB' B_1'$, $CC' C_1'$ எனும் முக்கோணங்களின் BC, $E' C'$, $B' C'$, எனும் கோடுகள் A_1 ல் சந்திக்கின்றன, அதாவது A_1 பார்வைமையம். ஆகையால் BB'; CC'; வெட்டும்புள்ளி G; $B' B_1'$; $C' C'_1$ வெட்டும் புள்ளி O. B_1', $B C_1'$; C_1, வெட்டும் புள்ளி H என மூன்று புள்ளிகள் (மையக்கோட்டு சந்தி; சுற்றுவட்ட மையம், குத்துசந்தி) மூன்றும் ஒரு கோடமைவன. இதை ABC என்ற முக்கோணத்தின் ஆயிலர் கோடு என்றழைப்பார்கள்.

7·9. தனிக்கோடும், இருபடி வரைகளும்

யூக்லித வெளியில், இருபடி வரைகளை, நீள்வளையம், பரவளைவு அதிபரவளைவு, செங்கோண அதிபரவளைவு எனப் பிரிக்கின்றோம். கந்தழிக்கோட்டை இருபடிவரை, கற்பனைப்புள்ளிகளில் வெட்டினால் அது நீள்வளையம் என்றும், மெய்ப்புள்ளிகளில் வெட்டினால், அது அதிபரவளைவு (Hyperbola) எனவும், தொட்டால், அல்லது இரண்டும் பொருந்தும் புள்ளிகளில் வெட்டினால் பரவளைவு (parabola) எனவும், இயற்கணித வழி, (யூக்லித வெளியில் வரை கணிதம் விவரிக்கும்போது) கூறுகிறோம்.

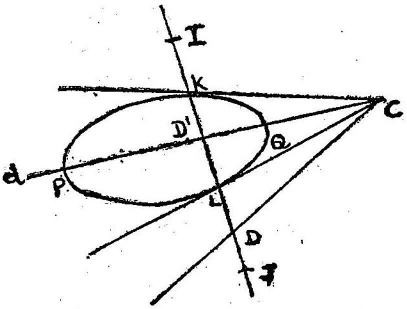
நாம் இதுவரை மெய்ப்புள்ளி, கற்பனைப்புள்ளி எனப் பிரிக்காமல், இரண்டையும் ஒரே வகைப் புள்ளிகளாகக் கொண்டுள்ளோம். ஆகவே நீள் வளையம், அதிபர வளைவு எனப் பிரிக்க முடியாது. ஆயினும் தனிக்கோட்டையும், தனிப் புள்ளிகளையும் பயன்படுத்தி 'மையமுடை' இருபடிவரை (Central conic) மையமிலா இருபடி வரை (Parabola) எனவும், மைய முடை இருபடி வரையில் குறிப்பாக செங்கோண அதிபர வளைவு (Rectangular Hyperbola) எனவும் பிரித்து அவற்றின் தனிப்பண்புகள் சிலவற்றைக் கூறுவோம்.

7·10. எல்லா இருபடிவரைகளையும் தனிக்கோடு இருபுள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. (i) வெட்டும் புள்ளிகள் வெவ்வேறாக இராமல், பொருந்துவன. ஆனால் அத்தகைய இருபடிவரை, பரவளைவு **(Parabola)** எனப்படும். (ii) வெட்டும் புள்ளிகள் வெவ்வேறாகி, தனிப்புள்ளிகளின், இசைப் பிரிவுப் புள்ளிகளானால் அத்தகைய வரை செங்கோண அதிபரவளைவு **(Rectangular hyperbola)** எனப்படும். (iii) இருபடிவரைகளுக்கு; தனிக்கோடு வெட்டும் புள்ளிகளில் அமையும் தொடுகோடுகள் 'தொலைத்தொடு கோடுகள்' **(asymptotes)** எனப்படும். ஆகவே, பரவளைவின் 'தொலைத்தொடு கோடுகள்' தனிக்கோட்டுடன் பொருந்துவனவாகும். செங்கோண அதிபரவளைவின் தொடுகோடுகள் குத்துக் கோடுகளாகும். (iv) இருபடிவரைக்குத் தனிக்கோட்டின் இசைப்

புள்ளி, இருபடிவரையின் மையம் **(centre)** எனப்படும். ஆகவே, தொலைத் தொடுகோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி மையம் ஆகும். மையத்தினின்று இருபடிவரைக்குள்ள தொடுகோடுகள், தொலைத் தொடுகோடுகளாகும். தனிக்கோடு, மையத்தின் தொடு நாண் ஆகும். பரவளைவின்மையம் தனிக்கோடு அதைத் தொடும் புள்ளியேயாகும்.

(v) மையம் வழி உள்ள நாண் விட்டம் **(diameter)** எனப்படும். பர வளைவின் மையம் தனிக்கோட்டில் இருப்பதாலும், தனிக் கோட்டில் சந்திக்கும் கோடுகளை இணை கோடுகள் என்று கூறுவ தாலும், பரவளைவின் விட்டங்கள் இணைகோடுகளாகும்.

7·11. (vi) ஒரு இருபடி வரைக்கு, மையம் வழி உள்ள துணையியக் கோடுகள், அதன் துணையிய விட்டங்கள் எனப்படும்.



படம். 46

தனிக்கோடு இருபடி வரையை K, L ல் வெட்டட்டும். d, d' இரண்டு துணையியவிட்டங்களாகுக. D, D' அவற்றின் இசைப் புள்ளிகளாகுக. அப்போது d' ம் தனிக்கோடும் IJ துணையியக் கோடுகள். d ம் தனிக்கோடும் துணையியக் கோடுகள்.

∴ CDD' எனும் முக்கோணம், இருபடிவரைக்குத் தன்னிசை முக்கோணம்,

∴ d எனும் விட்டம் இருபடிவரையை PQ வில் வெட்டினால், PQ வில் உள்ள தொடுகோடுகள் D யில் சந்திக்கும். அதாவது அவை இணை கோடுகளாகும். RS எனும் நாண் D யில் d' ஐ சந்திக் கட்டும். d ஐ அது X ல் வெட்டட்டும். ∴ $(RS, DX) = -1$.

∴ RS ன் நடுப்புள்ளி X; ஆகவே d' க்கு இணையான நாண் களின் நடுப்புள்ளிகள் அதன் துணையியவிட்டமாகிய dல் அமையும்.

7·12. (vii) $(DD', RL) = -1$. இவ்வாறு பல சோடி துணையிய விட்டங்கள் தனிக் கோட்டை வெட்டும் சோடிப் புள்ளிகளுக்கு, *K, L* இசைப்பிரிவுப் புள்ளிகளாகும். ஆகவே அவை *K, L* ஐ ஒன்று சேர் புள்ளிகளாகக் கொண்ட அடுக்கு வரிசையில் அமையும். ஆகவே *C* வழியுள்ள சோடி துணையிய விட்டங்கள் அடுக்குக்கோட்டுக் கற்றையாகும், அவற்றின் ஒன்று சேர் கோடுகள் தொலைத் தொடுகோடுகளாகும்.

7·13. (viii) வட்டத்திற்குத் தொலைத் தொடு கோடு *CI, CJ* ஆகும். [மேல் காட்டிய படத்தில் *K, L* என்பவை முறையே *I,J* யுடன் பொருந்தினால், இருபடி வரை வட்டமாகும்,] $\therefore (dd', CI, CJ) = -1$ ஆவதால் *d, d'* குத்துக் கோடுகள். அதாவது வட்டத்தின் துணையிய விட்டங்கள் குத்துக் கோடுகளாகும்.

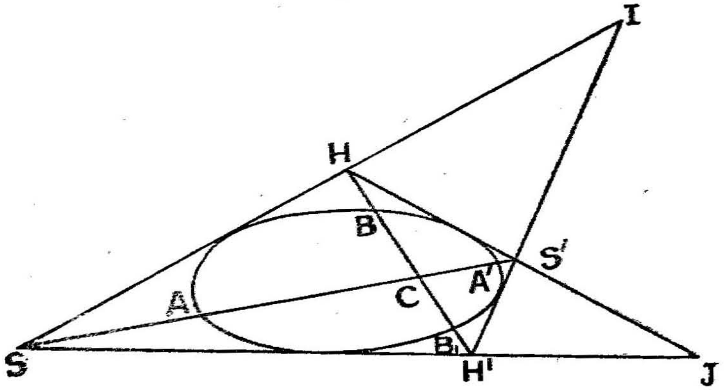
7·14. (ix) (*a*) இருபடி வரை தனிக் கோட்டை *K, L* ல் வெட்டட்டும்; *C* அதன் மையம், *d', d'* எனும் இருதுணையிய விட்டங்கள் *D', D* எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. அப்போது $(KL, D'D) = -1$. அப்போது *(K, L) (IJ)* எனும் சோடிகள் நிச்சயிக்கும் அடுக்கு வரிசையின் ஒன்று சேர்ப் புள்ளிகள் *E, E'* என்றால் $(KL, EE') = -1$ ஆகும். ஆனால் *K, L* என்பவை *(D', D)* போன்ற சோடிப் புள்ளிகள் தரும் அடுக்கு வரிசையின் ஒன்று சேர் புள்ளிகள். ஆகவே *EE'* ம் இந்த அடுக்கு வரிசையைச் சேர்ந்தது. ∴ [*CE, CE'* இருப்பு வரையின் துணையியக் கோடுகள் $C(EE' ; IJ) = -1$ ஆனதால் இவை குத்துத் துணையிய விட்டங்கள். இவ்வாறு ஒரு சோடிப் புள்ளியே காண முடியுமாதலால், பொதுவாக இருபடி வரைக்கு (மையமுடைய இருபடி வரைக்கு) ஒரு சோடிக் குத்துத் துணையிய விட்டங்களே உள்ளன.]

[*(IJ) (KL)* எனும் இருசோடிப்புள்ளிகள்நிச்சயிக்கும் அடுக்குப் புள்ளிவரிசைக்கும், *(KK), (LL)* எனும் ஒன்று சேர்புள்ளிகள் தரும் அடுக்குப்புள்ளி வரிசைக்கும் பொதுவாக ஒரே சோடிப்புள்ளிகள் உள்ளன, அவைதான் மேற்கூறிய *EE'* ;]

7·15. (*b*) ஒரு இருமடிவரைக்கு ஒரு சோடிக்கு அதிகமாக குத்துத் துணையிய விட்டங்கள் இருக்குமானால், அது வட்டமாகும். *CE, CE'* ; *CF, CF'* என்பவை இரண்டு சோடிக்குத் துணையிய விட்டங்களாகுக, இரண்டு சோடிக் கோடுகள் ஒரு அடுக்குக்கோட்டுக் கற்றையைத் தரும். ∴ *(CE, CE') (CF, CF')* துணையியவிட்ட அடுக்குக் கோட்டுக் கற்றையைத் தருகின்றன. இவை குத்துக் கோடுகளானதால் $C(EE', IJ) = -1$: $C(FF', IJ) \equiv -1$, ∴ *CI, CJ* என்பவை ஒன்று சேர் கோடுகள். ஆனால் ஒன்றுசேர் கோடு

கள். C லிருந்து வரைக்குள்ள தொலைத் தொடுகோடுகளாக வேண்டும். ∴ வரையின் மேல் I, J எனும் புள்ளிகள் அமைகின்றன. ஆகவே இருபடிவரை, வட்டமாகும்.

7·16. இருபடிவரையின் அச்சும், குவியமும்



படம். 47

I, J எனும் தனிப் புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு இருபடிவரைக்கு இரண்டு சோடித் தொடு கோடுகள் உள்ளன. இந்த நான்கு கோடுகள், ஒரு நாற்கரமாகின்றன. அதன் எதிரெதிர் முனைகள் SS' ; HH' ; IJ, S. S' ; H, H'; எனும் புள்ளிகளை இருபடி வரையின் 'குவியங்கள்' (*foci*) என்போம். SS' : HH' எனும் மூலைக் கோடுகளை இருபடி வரையின் அச்சுக்கள் என்போம். SS' ; HH' : IJ எனும் மூலைக் கோடுகள் மூலை முக்கோணத்தைத் தருகின்றன. இது இருபடி வரைக்குத் தன்னிசை முக்கோணம் என்று காட்டியுள்ளோம். ஆகவே SS' HH'; எனும் அச்சுக்கள் வெட்டும் புள்ளி C, IJ எனும் தொடுகோட்டின் இசைப் புள்ளி; அதாவது இருபடி வரையின் மையம் C.

அல்லாமலும் SCS' ; HCH' எனும் கோடுகள் CI, CJ எனும் கோடுகளின் இசைப்பிரிவு கோடுகள் [நாற்கரத்தின் இசைப் பிரிவுப் பண்புப்படி].

∴ SS' ; HH' குத்து விட்டங்கள் அவை துணையியக் கோடுகள். ஆகவே குத்துத் துணையிய விட்டங்கள். குவியங்கள், இருபடி வரையின் ஒரே குத்துத் துணையிய விட்டங்களில் அமைகின்றன.

SS' எனும் கோடு [இருபடிவரையை AA' ல் வெட்டட்டும். தனிக்கோட்டை C' ல் வெட்டினால், CC' இருபடிவரைக்குத் துணை

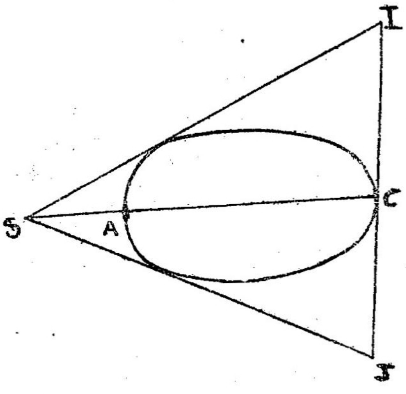
யப்புள்ளிகள். ∴ $(AA':CC')=-1$. AA'ன் நடுப்புள்ளி C; இதே போல, HH' இருபடிவரையை BB'ல் வெட்டினுல் BB'ன் நடுப் புள்ளி C என வரும்.

குவியங்களின் இசைக்கோடுகள் (இருபடிவரைக்கு) வரையின் இயக்குக் கோடு (*Directrix*) எனப்படும்.

SS'ன் இசைப்புள்ளி, IJ எனும் தனிக்கோடும் HH'ம் வெட்டும் புள்ளியாகும். $[SS'; HH'; IJ]$ எனும் மூன்று பக்கங்கள் கொண்ட மூலமுக்கோணம் தன்னிசை முக்கோணம் ஆவதால். ∴ S, S'ன் இசைக்கோடுகள் அந்தப்புள்ளி வழிச் செல்லவேண்டும். ஆகையால் இந்த இசைக்கோடுகள் — அதாவது இரு இயக்கும் வரைகள்—HH' எனும் அச்சுக்கு இணையாகின்றன. இதேபோல HH எனும் குவியங்களின் இசைக் கோடுகளான மற்றிரு இயக்கு வரைகள் AA' எனும் அச்சுக்கு இணையாகும்.

7·17. பரவளைவு (Parabola)

தனிக்கோடு இதற்குத் தொடுகோடாக அமைகிறது. தொடும் புள்ளி C, மையம். அது தனிக் கோட்டில் உள்ளது. I, J எனும் தனிப் புள்ளிகளில் இருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகள் S ல் சந்தித்தால் S என்பது பரவளைவின் ஒரே குவியமாகும். அதன் இசைக் கோடு, பரவளைவின் இயக்கு வரையாகும். முன் சொன்ன இருபடி வரைகளில் உள்ள ஏனைய குவியங்களில் S' இங்கு C யுடன் பொருந்து கிறது. H, H' எனும் குவியங்கள் முறையே I, J வுடன் பொருந்துகிறது. SC என்பது பரவளைவின் அச்சு எனப்படும். இவ்வாறு பரவளைவுக்கு ஒரே ஒரு அச்சு உள்ளது. இந்த அச்சு பரவளைவு A எனும் மற்றொரு புள்ளியில் வெட்டினுல் அந்தப் புள்ளி பரவளைவின் முனை (*Vertex*) எனப் படும். S எனும் குவியத்தின் இசைக்கோடு, பரவளைவின் இயக்கு வரையாகும்.



படம். 48

குவியமும், இயக்குவரையும் தரப்பட்டால், ஒரே பரவளை வைத்தான் காணலாம். ஏனெனில் S என்பது குவியமாகுக. SI, SJ என்ற கோடுகள் தொடு கோடுகளாகும். இயக்குவரை இந்தக் கோடுகளை K, L எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். அப்போது KI, KS, LJ, LS, IJ எனும் ஐந்து கோடுகளைத் தொடும் இருபடி வரை ஒன்றேயுள்ளது. அதாவது SI, SJ எனும் வரைகளுடன் குறிப்பிட்ட புள்ளிகளில் இரட்டைத்தொடுகை உள்ளதாகவும், IJ ஐத் தொடும்படியாகவும் உள்ள இருபடிவரை – அதாவது பரவளைவு – ஒன்றே உள்ளது.

7·18. குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டம் (Director circle)

P எனும் புள்ளியிலிருந்து இருபடி வரைக்கு PT, $PT^{1\prime}$ என்பவை தொடுகோடுகளாகுக. இவை குத்துத் தொடுகோடுகளானல் $P(TT',IJ)=-1$ $\therefore$ PI, PJ என்பவை இருபடி வரைக்குத் துணையியக் கோடுகளாகும். இவ்வாறு I, J வழி, இருபடி வரைக்குள்ள துணையியக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி P யின் இயங்குவரை யாதெனக் காண்போம்,

I வழி ஏதேனும் ஒரு கோட்டை —(IPஎன்க—) கொள்க. இருபடி வரைக்கு இந்தக் கோட்டின் இசைப் புள்ளியை J யுடன் சேர்க்கவும். இந்தக் கோட்டை JP என்போம். இவ்வாறு IP எனும் கோட்டுக்கும் JP எனும் கோட்டுக்கும் $(1-1)$ தொடர்பு இருக்கிறது. [அதாவது I வழியுள்ள ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் J வழி ஒரே துணையியக் கோடுள்ளது]. இவ்வாறு I வழியுள்ள கோடுகளும், J வழியுள்ள அவற்றின் துணையியக் கோடுகளும் தொடர்புடைக் கோட்டுக் கற்றைகளாகின்றன. ஆகையால் அவற்றின் ஒத்த கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி Pயின் இயங்கு வரை I, J வழியுள்ள இருபடி வரையாகும்; அதாவது வட்டமாகும். இவ்வாறு இருபடி வரைக்குள்ள குத்துத் தொடு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு வட்டம் எனக் காண்கிறோம்.

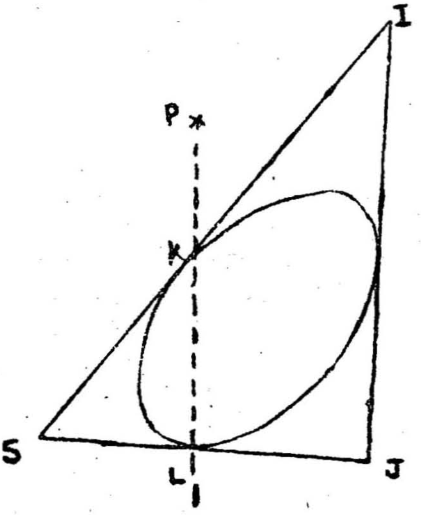
(ii) I எனும் தனிப்புள்ளியிலிருந்து இருபடி வரைக்கு உள்ள தொடுகோடு IS, வரையை K எனும் புள்ளியில் தொடட்டும். இந்த கோட்டின் இசைப்புள்ளி K. Kஐ Jயுடன் சேர்க்க வரும் JK, IKன் துணையியக்கோடாகும். $\therefore$ IKம், JKம் ஒத்தகோடுகள். K லிருந்து இருபடி வரைக்குள்ள தொடுகோடுகள் KI, KI எனும் பொருந்து தொடுகோடுகள் (Coincident tangents). இவை சுயக்குத்துக் கோடுகள். ஆகவே K எனும் புள்ளி, குத்துத்தொடுகோட்டு வட்டத்தில் அமையும். [$K(II,IJ)=-1$ என, இசைக்கோட்டுக் கற்றையாவதைக் கவுனிக்கவும்.] இதுபோலவே, Jயிலிருந்துள்ள தொடுகோடு

இருபடிவரையை L எனும் புள்ளியில் தொட்டால் அதுவும் குத்துத் தொடு கோட்டு வட்டத்தில் அமைகிறது. இவ்வாறு இருபடி வரையின் இயக்கவரைகள், இருபடி வரைக்கும், குத்துத் தொடு கோட்டு வட்டத்திற்கும் பொது நாண்களாகும்.

７·19. (iii) *பரவளையின் குத்துத் தொடுகோட்டு "வட்டம்"*

இங்கு I வழியுள்ள IJ எனும் கோடு பரவளைவுக்குத் தொடு கோடு. ஆகவே J வழி அதன் துணையியக்கோடு JI. ஆகவே குத்துக்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் JI எனும் தனிக்கோட்டில் அமைகின்றன. இவ்வாறு வட்டம் இருகோடுகளாகச் சிதைகிறது. மற்ற கோடு பரவளைவின் இயக்கு வரையாகும்.

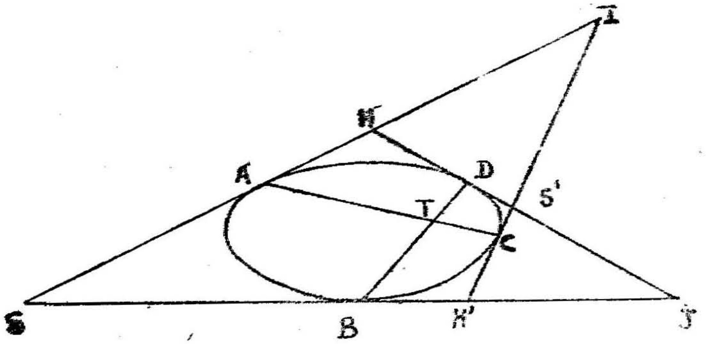
KL என்பது பரவளைவின் இயக்கு வரையாகுக. அது குவியம் S ன் இசைக் கோடு. ஆகவே KL ல் உள்ள ஏதேனும்



படம். 48

புள்ளி P யின் இசைக்கோடு S வழிச் செல்லும். இவ்வாறு P யின் இசைக்கோடு "குவியம் வழி நாண்" (*focal chord*) ஆகிறது. அதன் முனையில் உள்ள தொடு கோடுகள் P யில் சந்திக்கின்றன. ஆனால் இயக்குவரை, குத்துத் தொடு கோட்டு வட்டமும் ஆகும். ஆகவே ஒரு பரவளைவின் குவியம் வழிநாண் முனைகளில் உள்ள தொடு கோடுகள் குத்துக்கோடுகள் எனும் தேற்றம் புலனாகிறது.

7·20. கணக்கு 1. **ஒரு இருபடி வரையின் மையமும், அதன் குத்துத்தொடு கோட்டு வட்டத்தின் மையமும் ஒன்றே எனக் காட்டுக.**



படம். 50

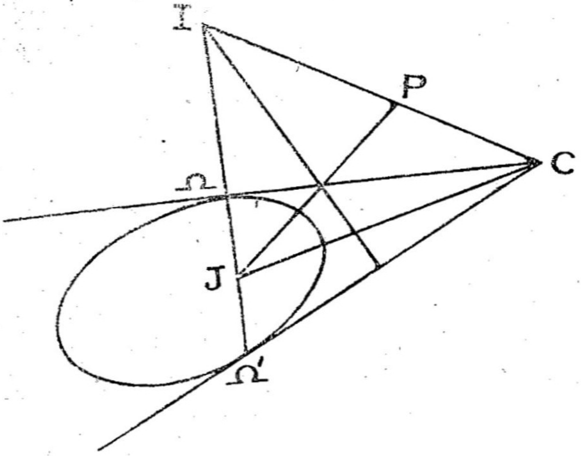
I,J என்பவை தனிப்புள்ளிகள். *IS, IS' JS, JS'* எனும் இருபடி வரைக்குள்ள தொடுகோடுகள் இருபடிவரையை *ABCD* எனும் புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. *AC, BD, T*யில் வெட்டட்டும். அந்நான்கு கோடுகளால் ஆன நாற்கரத்தின் மூலை முக்கோணமும் *A B C D* என்ற நாற்கோணத்தின் மூலைமுக்கோணமும் ஒன்றே. இருபடிவரையின் மையம் *IJ* ன் இசைப்புள்ளி அதாவது *S S', H, H'* வெட்டும்புள்ளி; இது *AC,BD* வெட்டும் புள்ளியேயாகும். இருபடி வரைமையம் *T*. குத்துத்தொடு கோட்டு வட்டம் *A B C D I J* வழிச் செல்வதால் *I J* ன் (மூலை முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம்) இசைப் புள்ளி *T* ஆகும். ஆகவே வட்டத்தின் மையமும் *T* யே ஆகும்.

7·21. கணக்கு 2. செங்கோண அதிபரவளைவின் குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டம் யாது?

செங்கோண அதிபரவளைவுக்கு *IJ* என்பவை துணையியப்புள்ளி கள். *IJ*ன் இசைப்புள்ளி அதிபரவளைவின் மையம் *C*. ஆகையால் *CIJ* என்பது இருபடிவரைக்குத் தன்னிசை முக்கோணம்.

P எனும் புள்ளியை *PI,PJ* எனும் கோடுகள் துணையியக்கோடு களாக இருக்குமாறு கொள்வோம். *PI*ன் இசைப்புள்ளி, *P* யின் இசைக்கோடும் *I* ன் இசைக்கோடும் சேரும்புள்ளி ; அதாவது *CJ*ன் மேல் இருக்கும், *PJ* துணையியக் கோடானதால் *PJ*ன் மேலும் இருக்கும் (ஆனால் *J* அல்ல). ஆகவே *P* எனும் புள்ளி *CJ* யில் இருக்கவேண்டும்.

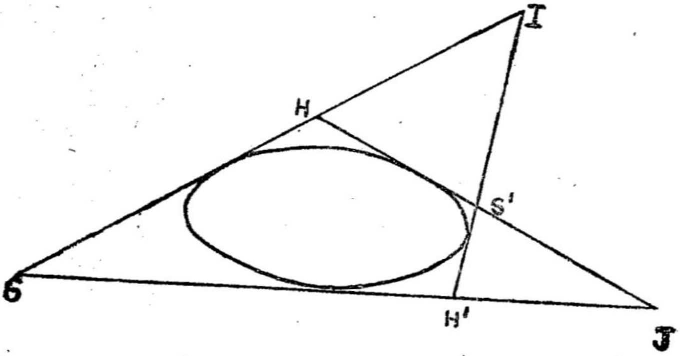
ஆகவே I, J வழியுள்ள துணையியக்கோடுகள் CJ ல் சந்திக்கும். அல்லது இதே போல CI லும் சந்திக்கும். ஆகவே செங்கோண



படம். 51

அதிபரவளைவின் சூத்துத் தொடு கோடு வட்டம் CI, CJ எனும் இரு கோடுகளாகச் சிதைகிறது. [யூக்லித முறைவரை கணிதத்தில் I, J கற்பனைப் புள்ளிகள், CI, CJ கற்பனைக் கோடுகள். ஆனால் அவை வெட்டும் புள்ளி C மெய்ப்புள்ளியாகும். ஆகவே சூத்துத்தொடு கோட்டுவட்டம் இருபடி வரையின் மையம் மட்டும் என்று காண்கிறோம்.]

7·22. பொதுக்குவிய இருபடி வரைகள் (confocal conics)



படம். 52

ஒரே குவியங்களையுடைய இருபடிவரைகள், நாற்கோட்டு இருபடிவரைகள் எனக்காண்கிறோம். I, J எனும் தனிப்புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு இருபடிவரைக்குள்ள தொடுகோடுகளைப் பொதுத் தொடுகோடுகளாகவுள்ள இருபடிவரைகள், பொதுக்குவிய இருபடி வரைகளாகின்றன.

(i) ஆகவே பொதுக்குவியங்களை யுடையனவாயும், ஒரு கோட்டைத் தொடுவனவாகவும் ஒரே ஒரு இருபடிவரை உண்டு.

(ii) தேசார்குத் தேற்றத்தால், ஒரு புள்ளியிலிருந்து பொதுக் குவிய இருபடிவரை ஒவ்வொன்றுக்கும் வரையப்படும் சோடித் தொடுகோடுகள், அடுக்குக் கோட்டுக்கற்றையை சார்ந்தவை.

(iii) இந்த அடுக்குக்கற்றையின் ஒன்றுசேர்க்கோடுகள் TK TL ஆகுக. ஆகவே இரண்டு ஒருபடி வரைகளில், ஒன்று T வழி, TK ஐத் தொடுவதாகும், இன்னொன்று T வழி TL ஐத் தொடுவதாகும். அதாவது பொதுக்குவிய இருபடி வரைகளில், ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் இருபடி வரைகள் இரண்டு உள்ளன.

$T(KL, I) = -1J$ ஆவதால் இந்தத் தொடுகோடுகள் குத்துக் கோடுகளாகும். ஆகவே ஒரு புள்ளிவழி பொதுக்குவிய இருபடி வரைகளைச் சேர்ந்த இரண்டு இருபடி வரைகள் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும்.

7·23. (iv) நாற்கோட்டு இருபடி வரைகளுக்கு, ஒரு கோட்டின் இசைப்புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் அமையும் என்று கூறியுள்ளோம். பொதுக் குவிய இருபடி வரைகளும் நாற்கோட்டு இருபடி வரைகளாதலால், ஒரு கோட்டின் இசைப் புள்ளிகள், இந்த இருபடி வரைகளுக்கு இன்னொரு கோட்டில் அமையும். l என்பது ஒரு கோடாகுக. பொதுக் குவியத்தைச் சார்ந்ததாகவும், l ஐத் தொடுவதாகவும் ஒரே இருபடி வரையுள்ளது. அது l எனும் கோட்டை T எனும் புள்ளியில் தொடட்டும். l ல் K இன்னொரு புள்ளியாகுக, TK இந்த இருபடி வரைக்குத் தொடுகோடு. T வழி பொதுக் குவிய இருபடி வரையைச்சார்ந்த இன்னொரு இருபடி வரையுள்ளது. அதன் தொடு கோடு Tயில், TL ஆகுக. TL, TK க்குக்குத்தாகும். TL, TK, எனும் கோடுகள் T யிலிருந்து மற்ற இருபடி வரைகளுக்குள்ள சோடித்தொடுகோடுகள் அடுக்குக் கற்றையாகும். இவற்றின் ஒன்று சேர் கோடுகள் TL, TK. ஆகவே தொடு கோடுகளின் இசைப் பிரிவு கோடுகளாகும். அதாவது TP, TP' தொடுகோடுகளானல் $T(PP', KL) = -1$; $\therefore$ ஒவ்வொரு இருபடி வரைக்கு TL, TK துணையியக் கோடுகள். $\therefore$ TKஇன் இசைப் புள்ளிகள், அதாவது l ன் இசைப் புள்ளிகள்; அதற்குக்குத்தான TL

எனும் கோட்டில் அமையும். TKஐ Tல் தொடும் இருபடி வரைக்கு TK வரைச் செங்கோடாகும். இவ்வாறு கீழ் வரும் தேற்றம் வருகிறது.

பொதுக்குவிய இருபடி வரைகளில்

(i) ஒரே இருபடி வரை ஒரு கோட்டை T எனும் புள்ளியில் தொடும்.

(ii) அந்தக் கோட்டின் இசைப்புள்ளிகள் T ல் தொடும் இருபடி வரைக்குள்ள வரைச்செங்கோட்டில் அமையும்.

7·24. நாற்கரத்தின் பக்கங்கள் தொடும் இருபடி வரைகள் (Conics inscribed in a quadrilateral)

(i) நான்கு கோடுகளைப் பொதுத்தொடு கோடுகளாகக் கொண்ட இரண்டு இருபடிவரைகளின் குத்துத்தொடு வட்டங்கள் T, T' எனும் புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளட்டும். T யிலிருந்து நான்கு கோடுகளைத் தொடும் இருபடி வரைகளுக்குள்ள சோடித் தொடு கோடுகள் அடுக்குக் கற்றையாகும். T யிலிருந்து முதல் சொன்ன இரு இருபடி வரைகளுக்குள்ள சோடித் தொடுகோடுகள் குத்துக் கோடுகள். அடுக்குக் கற்றையில் இரண்டு சோடிகள் குத்தானல், மற்றெல்லாச் சோடிகளும் குத்துக் கோடுகளாகும். ஆகவே T எனும் புள்ளி நாற்கோட்டு இருபடி வரை ஒவ்வொன்றின் குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்தில் அமையும்; இதே போல T' ம் அமையும். ஆகவே நான்கு கோடுகளைத் தொடும் இருபடி வரைகளின் குத்துத் தொடு கோட்டு வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்களாகும்.

குறிப்பு 1. நான்கு கோடுகளையும், தனிக் கோட்டையும் தொடும் இருபடி வரை ஒன்றே உள்ளது. அதாவது நான்கு கோடுகளைத் தொடும் பரவளைவு ஒன்றே உள்ளது. அதன் குத்துத் தொடுகோட்டு "வட்டம்" அதன் இயக்குவரை (Directrix) ஆகும். குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டங்கள் ஓரச்சுவட்டங்கள் எனக் கூறினேம். அதன் அச்சு (Radical axis) இந்தப் பரவளைவின் இயக்குவரையாகும்.

குறிப்பு 2. ஓரச்சுக் குத்துத் தொடு கோட்டு வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் M, M' ஆகுக. இவையும் குத்துத் தொடு கோட்டு வட்டங்களைச் சேர்ந்தவை. ஆனல் 'புள்ளி'யைக் குத்துத் தொடு கோட்டு வட்டமாகவுடைய இருபடிவரை செங்கோண அதிபர வளைவு. ஆகவே, நாற்கோட்டு இருபடி வரைகளில் இரண்டு செங்கோண அதிபர வளைவுகள் உள்ளன.

குறிப்பு 3; நான்கு கோடுகள், இரண்டிரண்டாக. $AA'; BB'; CC'$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொண்டால், இந்தச் சோடிப் புள்ளிகள், நாற்கோட்டு இருபடி வரைகளில் சிதைந்த வரைகளாகும். AA' எனும் சிதைந்த வரையின் குத்துத் தொடு கோட்டு வட்டம், AA' வழி, A, A' ஐ விட்டமாகவுடைய வட்டமாகும். இதே போல BB' ; CC' எனும் புள்ளிகளை விட்ட நுனிகளாக வுள்ள வட்டங்கள் மற்றிரு சிதைந்த வரைகளின் குத்துத் தொடு கோட்டு வட்டங்களாகும். ஆகையால் இவையும் மேலே கூறிய ஓரச்சு வட்டத் தொகுதியைச் சேர்ந்தவை.

குறிப்பு 4: இவ்வாறாக, மூலைக்கோடுகளின் நடுப்புள்ளிகள் குத்துத்தொடுகோட்டு வட்டங்களின் மையங்கள், யாவும் ஒரு கோடமைபவை. குத்துத்தொடுகோட்டு வட்ட மையங்கள் நாற்கோட்டு இருபடிவரைகளின் மையங்களும் ஆகையால், நாற்கோட்டு இருபடி வரைகளின் மையங்கள் ஒரு கோடமைபவை: இந்தக் கோடு, நாற்கோட்டு இருபடி வகைகளில் ஒன்றான பரவளைவின் அச்சாகும்.

[நாற்கோட்டு இருபடி வரைகளுக்கு, ஒரு கோட்டின் இசைப் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைபவை (Pole locus) என்றோம். இந்த இருபடிவரைகளின் மையங்கள் தனிக்கோட்டின் இசைப்புள்ளிகள். ஆதலால், அவை ஒரு கோடமைய வேண்டும் என்று நிருபணத்தைக் கூறலாம்.]

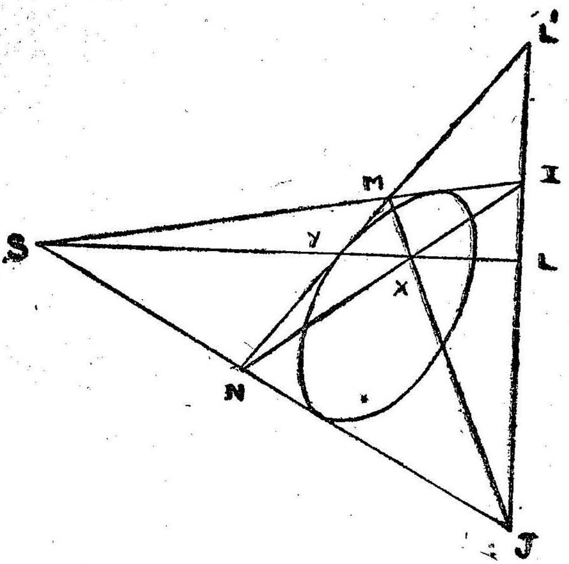
7·25. துணை வட்டம்

I, J தனிப் புள்ளிகள். S என்பது இருபடி வரையின் குவியம். ∴ SI, SJ என்பவை இருபடி வரையின் தொடு கோடுகள். இன்னொரு மாறும் தொடுகோடு SJ, SJஐ M, Nல் வெட்டட்டும். ஒவ்வொரு Mக்கும் ஒரே N என வருவதால் தொடு கோடுகள் மாற SI, SJ ல் M, N, தொடர்புடை வரிசைகளை ஏற்படுத்துகின்றன. JM IN எனும் கோடுகள் Xல் சந்திக்கட்டும். SX, MN எனும் கோடுகள் Yல் சந்திக்கட்டும்.

$SMXN$ எனும் நாற்கோணத்தின் இசைப் பண்பினால் MN, SY எனும் கோடுகள் IJ, ஐ LL' எனும் புள்ளிகளில் சந்தித்தால் $(IJ, LL') = -1$ ஆகவே SY, MN குத்துக்கோடுகளாகும். அதாவது MN எனும் தொடுகோட்டின் மேல் S லிருந்துள்ள குத்தடி (Foot of the Perpendicular) Y ஆகும்.

அன்றியும் $J(SM; YI) = -1$ [ஏனெனில் $(NM, YL') = -1$] JS, JI மாறாக் கோடுகள். $JMJY$ தொடர்புடைக் கோட்டுக்கற்றை

களை ஏற்படுத்துகின்றன. இதேபோல *IM*, *IY* ம் அவ்வாறே ஏற்படுத்துகின்றன. *SI*, *SJ* எனும் கோடுகளில் *M*, *N* தொடர்



படம். 53

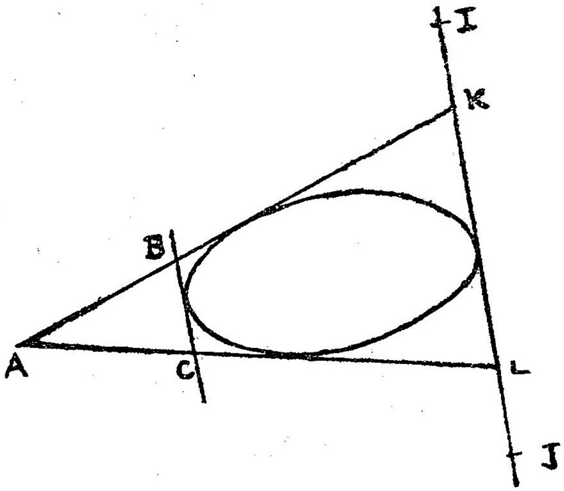
புடை வரிசைகளை ஏற்படுத்துவதால் *JY*, *IY* என்பவையும் தொடர்புடைக் கோட்டுக்கற்றைகளை ஏற்படுத்துகின்றன. ஆகை யால் *Y*ன் இயங்குவரை *IJ* வழியுள்ள இருபடி வரை அதாவது வட்டமாகும். இவ்வாறு ஒரு இருபடி வரையின் குவியத்திலிருந்து, அதன் தொடுகோட்டுக்குள்ள குத்தடியின் இயங்குவரை ஒரு வட்டம் எனத் தெளிவாகிறது. இந்த வட்டத்திற்கு, இருபடிவரையின் துணை வட்டம் (Auxiliary Circle) எனப் பெயராகும்.

எனும் குவியல் இருபடிவரையின் அச்சாகிய A A′ ல் இருந்தால் துணைவட்டத்தின் விட்டமும் AA′ ஆகும் என நிறுவுவோம்.

இருபடி வரையும், துணைவட்டமும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி களில் *P* ஒரு புள்ளி ஆகுக. *SP*, *IJ* எனும் கோடுகள் *R* எனும் புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்ளட்டும். *P* உள்ள தொடுகோடு *IJ* ஐ *Q* வில் சந்திக்கிறதென்போம், *P* வட்டத்தில் இருப்பதால் *SP*, *PQ* வுக்குக்குத்தாகும். ஆகையால் $S(QR,IJ)=-1$ ஆகும். ஆனல் *SI SJ* தொடுகோடுகள். ∴ *SQ*, *SR*, துணையியக்கோடுகள். *S*ன் இசைக்கோடு இயக்குவரையாகும். *P*ன் இசைக்கோடு, *P*யில்

உள்ள தொடுகோடு இவையிரண்டும் *SP*ன் (அதாவது *SR*ன்) இசைப்புள்ளியில் சந்திக்க.

7·26. பரவளைவு: தனிக் கோட்டைத் தொடும் இருபடி வரை பரவளைவு எனப்படும் என்று கூறினேம். ஆகவே ஒரு



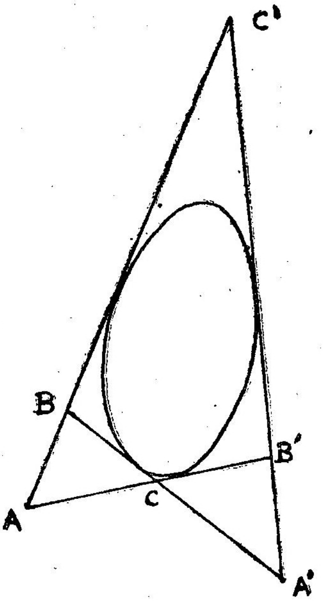
படம். 54

முக்கோணத்தின் பக்கங்களைத் தொடும் பரவளைவுகள் நாற் கோட்டு இருபடி வரைகளாகும். இத்தகைய பரவளைவுகளின் குவியங்கள் முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தில் அமையும் என்ப தைக் காட்டுவோம். *S* என்பது குவியமானல் *SIJ* எனும் முக்கோ ணத்தின் பக்கங்களும் இருபடிவரையான பரவளைவைத் தொடும் *ABC* என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களும் தொடுகின்றன. ஆகவே *A B C S I J* ஒரே இருபடிவரையில் அமையும். ஆனல் *A B C I J* என்பது முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டம். அதன் மேல் குவியம் *S* அமைகிறது.

ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களைத் தொடுமாறு ஒரு பரவளைவு மாறினல், அதன் குவியத்தின் இயங்குவரை, முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டமாகும்.

7·27. **ஒரு பரவளைவைத் தொடும் பக்கங்களையுடைய முக்கோ ணத்தின் குத்துமையம்(ortho centre) அதன் இயக்கு வரையில் அமை யும் அல்லது முக்கோணத்தின் பக்கங்களைத்தொடும் பரவளைவுகளின் இயக்குவரைகள் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளாகும்.**

A, B, C என்ற மூன்று புள்ளிகள் முக்கோணத்தின் முனைகள். *BC, CA, AB* எனும் பக்கங்கள் தனிக்கோட்டை *A′B′C′* எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன; அப்போது *AB, BC, CA, A′ B′* எனும் நான்கு கோட்டு இருபடி வரைகள் — பரவளைவுகள். இவற்றின் சிதைந்த இருபடி வரைகள் *AA′*; *BB′*; *CC′*; எனும் சோடிப் புள்ளிகள்.



படம். 55

A, B, C யின் குத்துமையம் *H* ஆகுக. *AH, BC* குத்துக் கோடுகளானதாலும் *BC,HA′* இணை கோடுகளானதாலும் *HA, HA′* குத்துக் கோடுகள். இதேபோல் *HB, HB′* குத்துக் கோடுகள். *HC, HC′* குத்துக் கோடுகள், *H* லிருந்து பரவளைவுகளுக்கு வரையப்படும் சோடித் தொடு கோடுகள் அடுக்குக் கற்றையாக அமையும். இவற்றுள் *HA, HA′*; *HB, HB′*; *HC, HC′*; ம் சேர்ந்தவையே. **ஆகையால் H பரவளைவுகளின் குத்துத் தொடுவட்டமாகிய இயக்குவரைகளில் அமைகிறது.**

7·28. *செவ்வக அதிபரவளைவு* (Rectangular Hyperbola)

ஒரு இருபடிவரை தனிக்கோட்டை தனிப்புள்ளிகளின் இசைப்பிரிவுப் புள்ளிகளில் வெட்டினால் அது செவ்வக அதிபரவளைவு எனப் பெயர்பெறும் என்று சொன்னோம். இதைப் பயன்படுத்தி, செவ்வக அதிபரவளைவைப் பற்றிய சில தேற்றங்களைப் பார்ப்போம்.

(i) நான்கு புள்ளிகள் வழியாகப் பொதுவாக ஒரே ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவுள்ளது. இரண்டு அத்தகைய வரைகள் இருந்தால் நான்கு புள்ளி இருபடி வரைகள் யாவுமே செவ்வக அதிபர வளைவாகும்.

இதை நிறுவ நான்குபுள்ளி இருபடி வரைகளைப்பற்றிய தேசார்குத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவோம். இதன்படி ஒவ்வொரு கோட்டையும் இருபடி வரைகள் [நான்கு புள்ளி] அடுக்குப்

புள்ளி வரிசையில் உள்ள சோடிப்புள்ளிகளில் வெட்டும். தனிக் கோட்டில் அத்தகைய அடுக்குப்புள்ளி வரிசை ஏற்படுகிறது. அந்த வரிசையின் ஒன்றுசேர் புள்ளிகள் E, F ஆகுக. I, J தனிப் புள்ளியாகுக. இருபடி வரைகள் வெட்டும் சோடிப்புள்ளிகள் $(PP'\ QQ' \ldots)$ ஆகுக. அப்போது E, F எனும் புள்ளிகள், $(PP', QQ' \ldots)$ என்ற சேர்டிப் புள்ளிகளின் இசைப் பிரிவுப் புள்ளி களாகும். அன்றியும் EF; IJ; எனும் இரு சோடிப் புள்ளிகள் இன்னொரு அடுக்குப் புள்ளிவரிசையைத் தரும். இதன் ஒன்று சேர்புள்ளிகள் XX' ஆனல் $(EF, XX') = -1$; $(IJ, XX') = -1$ ஆகும். $(EF, XX') = -1$ ஆனதால் XX' எனும் புள்ளிகள் முதல் அடுக்கு வரிசைக்கும் பொதுவாகும். ஆகவே நான்கு புள்ளிகள் வழியுள்ள ஒரு இருபடிவரை தனிக்கோட்டை, IJ ன் இசைப் பிரிவுப்புள்ளிகளான XX' ல் வெட்டும். இவ்வாறு பொதுவாக நான்கு புள்ளிகள் வழி ஒரே ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவுள்ளது எனக் காண்கிறோம்.

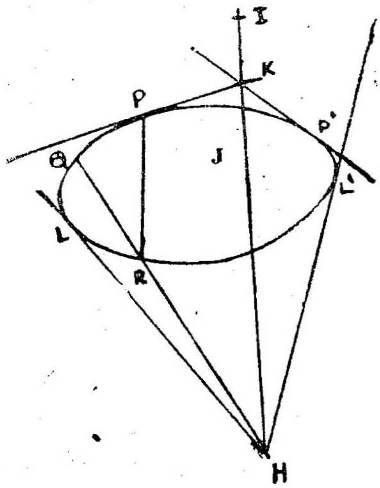
இரண்டு அதிபரவளைவுகள் நான்கு புள்ளிகள் A, B, C, D வழி இருந்தால் அவைத் தனிக்கோட்டை XX'; YY' எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். XX; YY' தனிக்கோட்டில் அடுக்குப்புள்ளி வரிசையை நிச்சயிக்கிறது. $ABCD$ வழியுள்ள ஏனைய இருப்டிவரைகள் தனிக் கோட்டை வெட்டும் சோடிப்புள்ளிகளான PP'; QQ' ... என்பவை இதைச் சேர்ந்தவை. ஆனல் $(XX'; IJ) = -1$ $(YY'; IJ) = -1$. $\therefore$ $(PP', IJ) = -1$ $(QQ'; IJ) = -1$. ஆகையால் இரண்டு நாற்புள்ளி இருபடி வரை செவ்வக அதிபரவளைவானல் ஒவ்வொரு நாற் புள்ளி இருபடிவரையும் செவ்வக அதிபரவளைவு ஆகும்.

குறிப்பு 1. AB, CD; $AC. BD$; AD, BC; எனும் சோடிக் கோடுகளும் நாற்புள்ளி இருபடி வரையைச் சேர்ந்த சிதைந்த வரைகளாகும். அதில் நான்கில் ஒரு புள்ளி, மற்ற மூன்று புள்ளி களாலான முக்கோணத்தின் குத்துச்சந்தியானல் மூன்று சிதைந்த இருபடிவரைகளும் செவ்வக அதிபர வளைவாகும். ஆகவே முக்கோணத்தின் முனைகள் வழியுள்ள ஒவ்வொரு அதிபர வளைவும் அதன் குத்துசந்தி வழிச்செல்லும்.

7·29. செவ்வக அதிபர வளைவின் இணைநாண்களை விட்டமாகவுடைய வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங் களாகும்

செவ்வக அதிபர வளைவின் இணைநாண்கள் தனிக் கோட்டை H எனும் புள்ளியில் வெட்டட்டும். IJ க்கு H ன் இசையிணைப்புள்ளி K ஆகுக. $\therefore$ H, K வழிக்கோடுகள் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும்.

∴ K யிலிருந்து KP, KP′ வரைக்குத் தொடு கோடுகளானல் அவை இணைநாண்களுக்குக் குத்தாகும் (இணை நாண்கள் H வழிச்செல்வதால்). QR என்பது இணைநாண்களில் ஒன்ருகுக, P, P′, QR எனும் நான்கு புள்ளிகள் வழி PP′ ; QR எனும் சிதைந்த செவ்வக அதிபர வளைவும், தரப்பட்ட செவ்வக அதிபர வளைவும் என இரண்டு செவ்வக அதிபர வளைவுகள் உள்ளன, ஆகவே PQ, PR எனும் கோடுகளும் குத்துக் கோடுகளே. ஆகவே QR எனும் நாணை விட்டமாக வுடைய வட்டம் P வழிச் செல்லும். அதே போல அந்த வட்டங்கள் P′ வழியும் செல்லும். எனவே இணை நாண்களை விட்டமாக வுடைய வட்டங்கள் ஓரச்சு வட்டங்களாகின்றன.



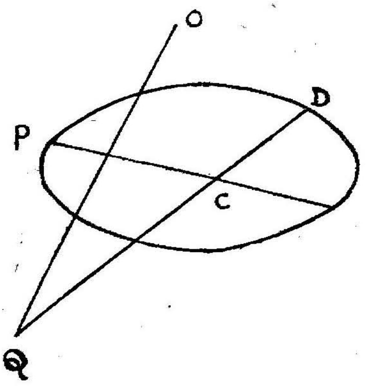
படம். 5.6

நாண்களுக்கு இணையான தொடு கோடுகள் வரையை L, L′ எனும் புள்ளிகளில் தொட்டால், அவை எல்லைப்புள்ளிகளாகும்.

7·30. அப்பலோனிசின் செவ்வக அதிபர வளைவு (Rectangular Hyperbola of Apollonius)

இருபடி வரை ஒன்றின் மையம் C ஆகுக. O ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. CP,CD என்பவை இரண்டுதுணையிய விட்டங்கள். CPக்குக் குத்தாக O வழியுள்ள கோடு CD ஐ Q வில் சந்திக்கிறது. CP மாறும் போது, CQக்கும் OQவுக்கும் (1-1) தொடர்பு உள்ளதைக் காண்கிருேம். ஏனெனில் OQ எனும் ஒரு கோட்டைக் கொண்டால், அதற்குக் குத்தாக ஒரே CP உள்ளது. அதன் துணையியக் கோடு CQ ஒன்றே உள்ளது. ஆகவே CQ ஒன்றேயுள்ளது. அதே போல C வழி, CQ எனும் கோட்டைக் கொண்டால், அதற்கு CP எனும் ஒரே துணையியக் கோடுள்ளது. அதற்குக் குத்தாக OQ எனும் ஒரே குத்துக்கோடுள்ளது. இவ்வாறு O(Q), C(Q) எனும் தொடர்புடைக் கோட்டுக் கற்றைகள் வருகின்றன. ஒத்த கோடுகள் வெட்டும்புள்ளி Q வின் இயங்குவரை, O, C வழிச் செல்லும் இருபடி வரையாகும்.

CQ எனும் கோட்டை இருபடி வரையின் ஒரு அச்சாகக் கொண்டால், அதன் துணையியக் கோடு, *CQ* வுக்கு குத்தான *CP* எனும் மற்றொரு அச்சாகும். *CQ*ன் ஒத்தகோடு *O* வழி *CP* க்குக் குத்தானது. ஆகவே *Q* எனும் புள்ளி தனிக் கோட்டில் அமைவதாகும். ஆகவே, இருஅச்சுக்கள் தனிக் கோட்டை வெட்டும் புள்ளிகள் இருபடி வரையில் உள்ளது. இவை ஒன்றற்கொன்று குத்தானதால் இருபடி வரை செவ்வக அதிபர வளைவாகும். அதன் தொலைத் தொடு கோடுகள், தரப் பட்டுள்ள இருபடி வரையின் அச்சுக்களுக்கு இணையாக இருக்கும்.



படம். 57

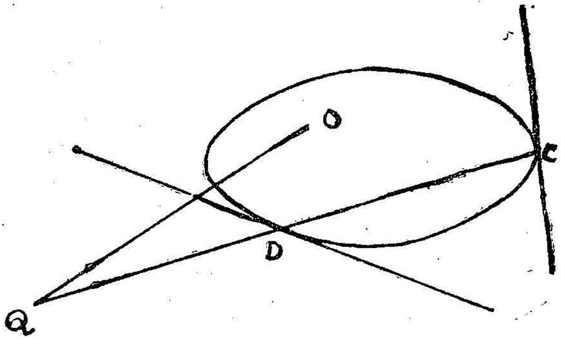
இயங்குவரையான செவ்வக அதிபரவளைவும் தரப்பட்டுள்ள இருபடி வரையும் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளும். அவற்றில் ஒரு புள்ளி *Q* ஆகுக. *Q* வில் உள்ள தொடு கோடு, *CQ* விற்குத் துணையிய விட்டமான *CP* க்கு இணையாகும். *O* வழி *CP* க்குக் குத்தான கோடு. *Q* வழி, அங்குள்ள தொடு கோட்டுக்கும் குத்தாகும். அதாவது *O* விலிருந்து இருபடி வரைக்குள்ள வரைக்கோட்டின் அடியாகும். (foot of the normal to the Conic) இது போன்றே, மற்ற மூன்றுவெட்டும் புள்ளிகளும். எனவே *O* எனும் புள்ளியிலிருந்து இருபடிவரைக்குப் பொதுவாக நான்கு வரைச் செங்கோடுகள் உள்ளன, அவை இருபடி வரையை வெட்டும் புள்ளிகள், இருபடி வரையின் மையம் வழியாகவும், O வழியாகவும், செல்லும் செவ்வக அதிபரவளைவின் மேல் உள்ளன.

இந்த செவ்வக அதிபரவளைவை *O* எனும் புள்ளியின் அப்போலனியஸ் செவ்வக அதிபர வளைவு என அழைப்பர்.

7·31. பரவளைவின் அப்பொலனியஸ் அதிபரவளைவு

பரவளைவின் மையம் *C* எனும் புள்ளி அது தனிக்கோட்டைத் தொடும் புள்ளியாகும். *CD* என்பது பரவளைவின் விட்டமாகுக. *D* யில் உள்ள தொடுகோட்டிற்குக் குத்தான *OQ* எனும் கோடு *CD* ஐ *Q* வில் சந்திக்கட்டும். ∴ *D* (*Q*). *C* (*Q*) எனும் கோட்டுக் கற்றைகள் (1—1) தொடர்புடையவை. ∴ *Q* வின் இயங்கு

வரை D, C வழி இருபடி வரையாகும். D, C யுடன் பொருந்தினல்

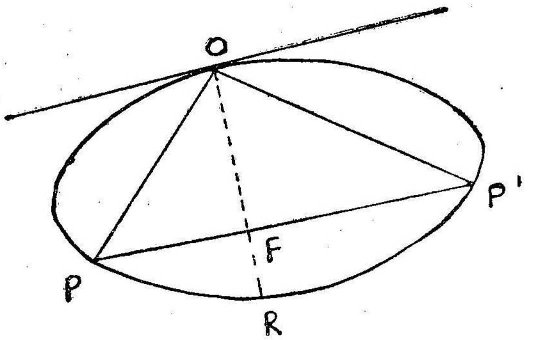


படம். 58

Q எனும் புள்ளி, IJ க்கு C யின் இசைப் பிரிவுப் புள்ளியாகும். ஆகவே Q வின் இயங்கு வரை செவ்வக அதிபர வளைவு ஆகிறது. O விலிருந்து பரவளைவுக்கு உள்ளவரைச் செங்கோட்டடிகள், இரண்டும் வெட்டிக் கொள்ளும் நான்கு புள்ளிகளாகும். அவற்றுள் ஒரு புள்ளி C; ஆகவே O எனும் புள்ளியிலிருந்து பரவளைவுக்கு மூன்று சாதாரண வரைச் செங்கோடுகளேயுள்ளன.

7·32. ஃப்ரீஜியர் புள்ளி (The Fregier Point)

இருபடி வரையில் **O** ஒரு புள்ளியாகுக. **PP′** மாறும் நாண். **OP,**



படம். 59

OP′ எப்போதும் குத்துக்கோடுகள் என்ருல் **PP′**, **O** வில் உள்ள வரைச் செங்கோட்டின் மேல் அமையும் ஒரு புள்ளி வழிச்செல்லும். இந்தப்

புள்ளி இருபடி வரைக்கு O வின் ∴ப்ரீஜீயர் புள்ளி எனப்படும். OP, OP' எனும் சோடிக்கோடுகள் அடுக்குக் கோட்டுக்கற்றை யாகும்; ∴ (PP') எனும் இருபடி வரையின் மேல் அமையும் சோடிப்புள்ளிகள் இருபடிவரை மேல் உள்ள அடுக்கு புள்ளி வரிசையாகும். ஆகவே PP' எனும் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளாகும். OO எனும் தொடு கோடும் OR எனும் வரைச்செங்கோடும் இந்த ஜோடிகளைச் சேர்ந்தவை. ∴ OR என்பதுவும் PP' ஐப்போல ஆகும். ஆகவே ORம் அந்த புள்ளி வழிச்செல்லும். இவ்வாறு PP' எனும் மாறும் நாண் Oவில் அமையும் வரைச் செங்கோட்டின் ஒருபுள்ளி வழிச்செல்லும்.

பயிற்சி

1. ஒரு வட்டத்தின் துணையிய விட்டங்கள் ஒன்றற்கொன்று குத்தானவை என நிறுவுக.

2. ஒரு இருபடி வரைக்கும் பொதுவாக ஒரு சோடிக்குத்து இணைவிட்டங்களே உள்ளன எனவும், அவ்வாறின்றி ஒரு சோடிக்குமேல், குத்துவிட்டங்கள் இருந்தால் இருபடிவரை வட்டம் ஆகும் எனவும் நிறுவுக.

3. ஒரு இருபடிவரைக்கு PP' என்பது ஒரு விட்டம். Q என்பது வரையின்மேல் ஒரு புள்ளி என்றால் $PQ, P'Q$ எனும் கோடும் ஒரு சோடித் துணையிய விட்டங்களுக்கு முறையே இணைகோடுகளாக அமையும் என நிலைநாட்டுக.

4. ஒரு இருபடி வரைக்கு அதன் மையத்தொடு கோட்டின் (asymptote) மேல் P எனும் புள்ளிவழி PAB, PCD எனும் இருகோடுகள், வரையை மீண்டும் A,B,C,D எனும் புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. A,B,C,D வழியுள்ள ஏதேனும் ஒரு இருபடிவரை இந்த மையத்தொடு கோட்டை U,V எனும் புள்ளியில் வெட்டுகிறது என்றால் UVன் நடுப்புள்ளி P எனக் காண்க.

5. P, Q எனும் புள்ளிகள் ஒரு இருபடி வரைக்குத் துணையியப்புள்ளிகள். PQ ன் நடுப்புள்ளி வரையின் மேல் அமைகிறது என்றால் PQ மையத் தொடு கோடு ஒன்றுக்கு இணையெனக் காண்க.

6. $P'P$ என்பது ஒரு இருபடி வரையின் விட்டம், வரையின் மீதுள்ள Q எனும் புள்ளி வரையின் தொடுகோடு. Pயில்

உள்ள தொடுகோட்டை T யில் வெட்டுகிறது. $P'Q$, வும் PT யும் R ல் சந்திக்கின்றன. PRன் நடுப்புள்ளி T எனக் காண்க.

7. ஒரு பரவளைவுக்கு PQ எனும் நாணின் இசைப்புள்ளி T ஆகும். T வழியுள்ள பரவளைவின் விட்டம், அதை N ல் வெட்டுகிறது. PQ வை Vல் வெட்டுகிறது. TVன் நடுப் புள்ளி N என நிறுவுக.

8. ஒரு பரவளைவுக்குள்ள இரண்டு குறிப்பிட்ட தொடு கோடுகளை, ஒரு மாறும் தொடுகோடு H, K எனும் புள்ளி களில் வெட்டுகிறது. HKன் நடுப்புள்ளியின் நியமப் பாதை ஒரு கோடு என நிறுவுக.

[குவியம் பற்றிய கணக்குகள்]

9. ஒரு இருபடிவரையின் மையம், அதன் இரு குவியங் களுக்கிடையேயுள்ள நடுப்புள்ளி என நிறுவுக.

10. குவியம் வழி, ஒரு இருபடி வரைக்குள்ள சோடித் துணையிய நாண்கள் ஒன்றற்கொன்று குத்தானவை எனக் காண்க.

11. பொதுமைய வட்டங்களின் பண்புகளிலிருந்து ஒரு புள்ளியையும் ஒரு கோட்டையும் முறையே பொதுக் குவியமாகவும், பொது இயக்குவரையாகவும் உள்ள இருபடிவரைகளின் பண்புகள் காணப்பெறும் என்பதை விளக்குக.

12. ஒரு இருபடி வரையின் நான்கு குவியங்களின் வழிச் செல்லும் இருபடி வரைகள் யாவும், செங்கோண அதி பரவளைவுகள் என நிறுவுக.

13. இரண்டு இருபடி வரைகள் ஒரு புள்ளியைக் குவியமாகக் கொண்டுள்ளன. அதைச் சார்ந்த அவற்றின் இயக்கு வரைகள் Pயில் சந்திக்கின்றன என்றால் அவற்றின் ஒரு பொது நாண் P வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

14. ஒரு இருபடி வரையின் ஒரு குவியம் S. இருபடி வரை யின் இருதுணையிய விட்டங்கள், S ஐச் சார்ந்த இயக்கு வரையை H, K ல் சந்திக்கின்றன. என்றால் CHK எனும் முக்கோணத்தின் குத்து மையம் S என நிறுவுக.

(பரவளைவு பற்றிய கணக்குகள்.)

15. நான்கு புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் இருபடி வரைகளுள் ஒன்று வட்டமானால், அப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் இரு பரவளைவுகளின் அச்சுக்கள் ஒன்றற்கொன்று குத்தாக அமையும் என நிறுவுக.

16. A என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி; l என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட கோடு. lல் P என்பது மாறும் புள்ளி. PA க்குக் குத்தாகவுள்ள PB எனும் மாறும் கோடு, A ஐக் குவியமாகவுடைய ஒரு பரவளைவைத் தழுவும் என நிறுவுக. (குறிப்பு: PB, தனிக் கோட்டை P' ல் சந்தித்தால் தனிக் கோட்டிலும், l உம் P', P எனும் புள்ளிகள் இரு தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசைகளை ஏற்படுத்துவதைக் காணலாம். இதைப் பயன்படுத்தவும்.)

17. l எனும் கோட்டில் உள்ள மாறும் புள்ளி P யிலிருந்து S எனும் இருபடி வரைக்கு P யின் இசைக் கோட்டிற்குக் குத்தாக q எனும் குத்துக் கோடு வரையப்படுகிறது. P மாறும்போது q எனும் கோடு l ஐத் தொடும் ஒரு பரவளைவைத் தழுவும் என நிறுவுக.

(அப்போலனியஸ் செங்கோண அதிபரவளைவும் ஃபிரிஜியர் புள்ளியும்)

18. ஒரு இருபடி வரையின் ஒரு குவியம், S. S ஐப் பற்றிய அப்போலனியஸ் அதிபர வளைவு, சிதைந்த இருபடி வரை எனவும், அது இருபடி வரையின் S உள்ள அச்சும் S ஐச் சார்ந்த இயக்கு வரையும் கொண்டதென நிறுவுக.

19. ஒரு இருபடி வரையின் மேல் O எனும் புள்ளி. O வில் உள்ள செங்கோடு (normal) வரையை மீண்டும் N ல் வெட்டுகிறது. ON ன் இசைப்புள்ளி, O வின் அப்போலனியஸ் அதிபர வளைவின் மேல் உள்ளதென நிறுவுக.

20. S என்பது இருபடி வரையின் குவியம். C ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. S இச்சார்ந்த இயக்கு வரையை OS எனும் கோடு N ல் சந்திக்கிறது. O வின் அப்போலனியஸ் அதிபரவளைவின் மேல் N உள்ளது என நிறுவுக.

21. ஒரு செங்கோண அதிபர வளைவின் மேல் உள்ள புள்ளியின் ஃபிரிஜியன் புள்ளி, தனிக்கோட்டில் உள்ளதென நிறுவுக.

22. ஒரு பரவளைவுக்கு, அதன் மேல் உள்ள O எனும் புள்ளியின் ∴பிரீஜியன் புள்ளி F. OF ன் நடுப் புள்ளி, பரவளைவின் அச்சின்மேல் உள்ளதென நிறுவுக.

8. கோடு, இருபடிவரை இவற்றின் சமன்பாடு

(The equation of a line and of a conic)

8·1. ஒரு கோடமையாத மூன்று புள்ளிகள் A, B, C ஐ ஆதாரப் புள்ளிகளாகவும், D எனும் புள்ளியை அலகுப்புள்ளியாகவும் கொண்டு, தளத்தில் ஒரு புள்ளி Pஐ எவ்வாறு $P = xA + yB + zC$ என உரைக்கலாம் என்றும் (xyz) அல்லது அவற்றின் ஒரே மடங் கெண்கள் எவ்வாறு P யின் சமபடிக் கூறுகள் எனப்படும் என்பதையும் முன்னரே கூறினோம்.

$P_1 (x_1, y_1, z_1)$ $P_2 (x_2, y_2, z_2)$ என இரண்டு புள்ளிகளானால் அவற்றுடன் ஒரு கோடமையும் புள்ளி $P = \lambda p_1 + \mu p_2$ எனவும் சொன்னோம்.

$$\therefore \quad P = (\lambda x_1 + \mu x_2) A + (\lambda y_1 + \mu y_2) B + (\lambda z_1 + \mu z_2) C$$

$\therefore$ P யின் கூறுகள் $(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$

$P (x, y, z)$ என்றால்

$$x - \lambda x_1 - \mu x_2 = 0$$
$$y - \lambda y_1 - \mu y_2 = 0$$
$$z - \lambda z_1 - \mu z_2 = 0$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} z & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ $P_1 P_2$ வழி உள்ள கோட்டின் ஒவ்வொரு புள்ளியின் x, y, z கூறுகள் $lx + my + nz = 0$ எனும் உருவத்தில் உள்ள சமன்

பாட்டுக்கு அடங்கியிருக்கும் எனக் காண்கிறோம். [இங்கு $l=(y_1 z_1-y_2 z_1)$; $m=(z_1x_2-z=x)$; $n=(x_1y_2-x_2y_1)$]

8·2. *மறுதலையாக*, l, m, n குறிப்பிட்ட நிலைஎண்கள் என்போம். $p^1 (x_1\ y_1\ z_1)$ $p_2\ (x\ \ y_2\ z_2)$ என்ற புள்ளிகளின் கூறுகள் $lx+my+nz=0$ எனும் சமன் பாட்டிற்கிணங்க இருக்கட்டும், என்றால் $(x_1+my_1+nz=0 : lx_2+my_2+nz_2=0$ $\therefore\ \lambda\ (lx_1+my_1+nz_1)\ +\mu\ (lx_2+my_2+nz_2)=0$ ஆகும்.

$l(\lambda x_1+\mu x_2)+m(\lambda y_1+\mu y_2)+n(\lambda z_1+\mu z_2)=0$ (எல்லா $\lambda_1\ \mu$ வின் மதிப்புக்களுக்கும்).

ஆகவே $\lambda x_1+\mu x_2$ $\lambda y_1+\mu y_2$ $\lambda z_1+\mu z_2$ எனும் புள்ளிகள், அதாவது p_1 p_2 வில் எல்லாப் புள்ளிகளும் $lx+my+nz=0$ தரும் இயங்கு வரையில் உள்ளன.

$\therefore$ தளத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு கோட்டின் சமன்பாடும் $lx+my+nz=0$ எனும் ஒருபடிச் சமன்பாடாகும். ஒவ்வொரு ஒரு படிச்சமன்பாடும் தளத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளைத் தரும்.

8·3. ஒரு கோட்டின் கூறுகள்

(l, m, n) எனும் மூன்று நிலை எண்கள், ஒரு கோட்டைத் தருகிறது. அதன் சமன்பாடு $lx+my+nz=0$; (l,m,n) எனும் வரிசை மூவெண்கள் இந்தக் கோட்டின் கூறுகள் எனப்படும். $\lambda lx+\lambda my+\lambda nz=0$ அதே சமன்பாட்டைத் தருவதால், $(\lambda l, \lambda m, \lambda n)$ எனும் (l, m, n) ன் மடங்குகளும் அதே கோட்டைத் தரும்.

BC, CA, AB என்பவை ஆதார முக்கோணங்களின் பக்கங்களானால் அவைகளின் சமன்பாடு $x=0$, $y=0$, $z=0$ ஆகும். ஆகவே அவற்றின் கூறுகள் முறையே $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ $(0,0,1)$ ஆகும்.

8·4. கோடு, புள்ளி இருமைத்தன்மை

$lx+my+nz=0$ எனும் சமன்பாட்டை இரண்டு விதமாகக் கருதலாம். (l,m,n) என்பவற்றை நிலை எண்களாகக் கொண்டால், (x, y, z) எனும் எண்கள் சமன்பாட்டிற்கு இணங்க மாறும் போது (l,m,n) எனும் கூறுகளைக் கொண்ட கோட்டில் உள்ள பல்வேறு புள்ளிகளைத் தருகிறது. ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளைத் தருகிறது எனக் கருதலாம்.

(x, y, z) எனும் எண்களை நிலையாகக் கொண்டு (l, m, n) எனும் எண்கள் மாறுவதாகக் கருதினல் (x, y, z) எனும் புள்ளி வழியுள்ள பல்வேறு கோடுகளைத் தருகிறது. இவ்வாறு ஒரு புள்ளிவழிக் கோடுகளைத் தருகிறது எனக் கருதலாம்.

குறிப்பு 1. (x, y, z) குறிப்பிட்ட மாறு எண்களாகுக $p_1 (l_1\ m_1\ n_1)$ $p_2 (l_2\ m_2\ n_2)$ என்பவை இரு கோடுகளாகுக. இவற்றின் கூறுகள் $l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0$ எனும் சமன்பாட்டிற் கிணங்கியிருந்தால் $l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0$, $l_2 x + m_2 y + n_2 z = 0$ ஆகும்,

$\therefore\ \lambda\ (l_1 x + m_1 y + n_1 z) + \mu\ (l_2 x + m_2 y + n_2 z) \equiv 0$, அதாவது $(\lambda l_1 + \mu l_2)\ x + (\lambda m_1 + \mu m_2)\ y + (\lambda n_1 + \mu n_2) z = 0$. அதாவது $\lambda l_1 + \mu l_2$, $\lambda m_1 + \mu m_2$, $\lambda n_1 + \mu n_2$ எனும் கூறுகளுடைய கோடுகளும் (x, y, z) எனும் புள்ளி வழிக் கோடுகளாகும்.

குறிப்பு 2. $(l_1\ m_1\ n_1)$, $(l_2\ m_2\ n_2)$ $(l_3\ m_3\ n_3)$ எனும் கூறுகளுடைய கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளானல்

$$l_3 = \lambda l_1 + \mu l_2$$

$$m_3 = \lambda m_1 + \mu m_2$$

$n_3 = \lambda n_1 + \mu n_3$ என ஏதோ குறிப்பிட்ட λ, μ வின் மதிப்புக்களுக்கு வரும்.

$$\therefore \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0$$

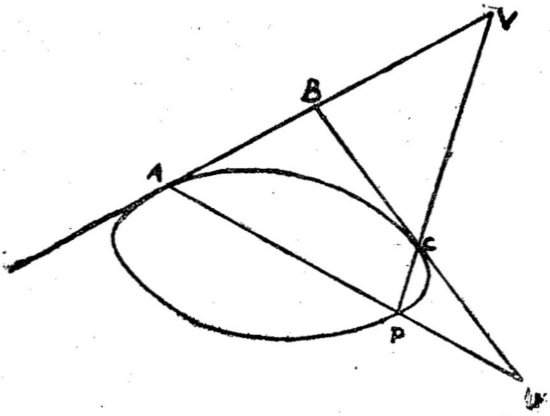
குறிப்பு 3. அதாவது $(l_3\ m_3\ n_3)$ எனும் கூறுகள் $l\ (m_1 n_2 - m_2 n_1) + m\ (n_1 l_2 - n_2 l_1) + n\ (l_1 m_2 - l_2 m_1) = 0$ எனும் சமன்பாட்டிற் கிணங்கியிருக்கும்.

அதாவது $(l_1, m_1\ n_1)$, $(l_2\ m_2\ n_2)$ எனும் கூறுகளையுடைய கோடுகள் செல்லும் புள்ளி—சந்திக்கும் புள்ளி—$(m_1 n_2 - m_2 n_1)$, $(n_1\ l_2 - n_2\ l_1)$, $(l_1\ m_2 - l_2\ m_1)$ எனும் கூறுகளையுடையதாகும்.

குறிப்பு 4. மேற்கூறியதின் இருபான்மை, $(x_1\ y_1\ z_1)$ $(x_2\ y_2\ z_2)$ எனும் கூறுகளையுடைய புள்ளிகள் அமையும் கோட்டின் கூறுகள் $(y_1\ z_2 - y_2\ z_1)$, $(z_1\ x_2 - z_2\ x_1)$, $(x_2\ y_1 - x_1\ y_2)$ ஆகும்.

8·5. இருபடிவரையின் சமன்பாடு

இருபடி வரையில் A, C இரு புள்ளியாகுக. A, A, C, C, P வழி ஒரே இருபடி வரை உள்ளது [A, C எனும் புள்ளிகளைப் பொருந்



படம். 60

தும் புள்ளிகளாகக் கொள்கிறோம்,] AA, CC அதாவது A, C யி லுள்ள தொடுகோடுகள் B யில் சந்திக்கட்டும். இருபடிவரை என்பது A, C ஐ முனையாகக் கொண்ட இரு தொடர்புடைக் கோட்டுக் கற்றைகளின் ஒத்த கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வரை என்கிறோம். ஆகவே AC என்ற கோட்டிற்கு C யில் உள்ள ஒத்தகோடு CC எனும் C யில் உள்ள தொடுகோடு. அதேபோல CA என்ற கோட்டிற்கு A யில் உள்ள ஒத்தகோடு AA எனும் A இல் உள்ள தொடுகோடு. P என்பது இருபடி வரையில் ஏதேனும் புள்ளி என்றால் AP, CP என்பவை ஒத்த கோடுகள் AP, CB, U விலும் CP, AB, V யிலும் சந்திக்கட்டும். இவ்வாறு $A(P), C(P)$ எனும் தொடர்புடைக் கோட்டுக்கற்றைகள் CB, AB யில் தொடர்புடை வரிசைகள் ஏற்படுத்துகின்றன. [BC யில் P ன் வீழல், A யிலிருந்து U, AB யில் Pன் வீழல் C யிலிருந்து V ஆகும்.]

B யும் C யும் இந்தப் புள்ளி வரிசையைச் சேர்ந்தவை. அவற்றின் ஒத்த புள்ளிகள் AB யில் A, B ஆகும். [P, A யுடன் பொருந்தும்போது AA, BCஐ Bயிலும் CA, ABஐ Aயிலும் வெட்டு கிறது, இதேபோல PCயுடன் பொருந்தும்போது AC, BCஐ C யிலும் CC, ABஐ Bயிலும் வெட்டுகிறது] AB Cஐ ஆதாரப்புள்ளி களாகக் கொள்க. $U=C+\theta B$ எனலாம், $A=B+\theta A$ எனலாம். தொடர்புடைப்புள்ளி வரிசையானதால் $p\theta\varphi+q\theta+r\varphi+s=0$.

BC யில் $B \to AB$ யில் A. $\therefore \theta = \infty \to \varphi = \infty$

BC யில் $C \to AB$ யில் B. $\therefore \theta = o \to \varphi = 0$

$\therefore p = o;\ s = o \quad \therefore q\theta + r\varphi = o$

அலகுப்புள்ளி $P \equiv A+B+C$ எந்தப் புள்ளியும் இருக்கலாம். அதை இருபடிவரையில் ஒரு புள்ளியாகக் கொள்வோம். அப்போது Pக்கு ஒப்பான U, V எனும் புள்ளிகள் $U = C+B$, $V = B+A$.

$\therefore \theta = 1$ என்ருல் $\varphi = 1 \quad \therefore q+r = 0$

$\therefore \theta, \varphi$ க்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு $\theta - \varphi = 0$ என ஆகிறது.

அல்லது $\theta = \varphi \quad \therefore \quad U = C+\theta B$

$$V = B + \theta A$$

P என்பது AV, CV எலும் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி.

$\therefore \quad P = \lambda A + \mu U = \lambda' C + \mu' V$ எனலாம்

$$\therefore \quad P = \lambda A + \mu\theta B + \mu C = \mu'\theta A + \mu' B + \lambda' C$$

$$\therefore \quad \lambda = R\mu'\theta;\ \mu = R\mu';\ \mu = R\lambda'$$

$$\therefore \quad P = \mu\theta^2\mu A + \theta\ \mu\theta B + \mu C$$

ABCஐ ஆதார முக்கோணமாகக் கொண்டால் Pயின் கூறுகள் $(x, y, z,)$ என்ருல் $x = \theta^2, y = \theta, z = 1$. ஆகும். இது இருபடி வரையின் துணையலகுச் சமன்பாடு ஆகும். வரையின் மேல் ஒவ்வொரு புள்ளியை 'θ' எனும் ஒரு துணை அலகால் உரைக்க முடியும். இவ்வாறு கோட்டின் மேல் புள்ளிகளைக் குறிப்பது போன்று, வரையின் மேலும் புள்ளிகளை ஒரே துணை அலகாய் கூற முடிகிறது.

θவை நீக்க, (x, y, z) எனும் ஒரு படித்தான கூறுகளில் சமன்பாடு $y^2 - xz = O$ என்பதாம். [இதில் ஆதார முக்கோணத்தின் ஒரு முனையின் எதிர்ப் பக்கம், இருபடி வரைக்குத் தொடுநாண் என்பதை மறக்கலாகாது.]

8·6. இருபடி வரையின் பொதுச் சமன்பாடு

$A'B'C'$ எனும் பொதுவான ஒரு முக்கோணத்தை ஆதார முக்கோணமாகக் கொண்டால் சமன்பாடு என்ன என்பதைப் பார்ப்போம்.

$A = a_1 A' + b_1 B' + c_1 C'$
$B = a_2 A' + b_2 B' + c_2 C'$
$C = a_3 A' + b_3 B' + c_3 C'$
$a, b, c, \ldots\ldots$ நிலை எண்கள்

$$P=\theta^2 (a_1A+b_1B'+ c_1C')+\theta (a_2A'+ b_2B'+c_2C') +(a_3 A'+b_3B'+c_3C')$$

$A'\ B'\ C'$ என்ற முக்கோணத்திற்கு P யின் கூறுகள் $(x'\ y'\ z')$ என்றால்

$$x' = a_1 \theta^2 + a_2 \theta + a_3$$
$$y' = b_1 \theta^2 + b_3 \theta + b_3$$
$$z' = c_1 \theta^2 + c_2 \theta + c_3$$

ABC என்பவை ஒரு கோடமைவன அல்ல ஆதலால்

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\therefore \quad (\theta^2, \theta, 1)=(a_1'x'+b_1'y^{1'}+c_1'z',\ a_2'x'+b'_2+c'_2z' \quad a_3'y'x'+b_3'y'+c_3z'$$

$a,'\ b,'$. முதலியவை a, b, c, வரும் புதிய நிலை எண்கள்.

$\therefore \quad (x,'y',z')$ எனும் கூறுகள்

$$(a_2'x'+b_2y'+c_2z')^2=(a_1x'+b'_1y'c._1'z,')\ (a_3x'+b_3'y'+c_3'z')$$

எனும் சமன்பாட்டிற்கு இணங்கியவை. இதைப் பொதுவாக (xyz) ல் இருபடிச் சமன்பாடாக $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ எனக் கூறலாம்,

குறிப்பு 1. இருபடிக் கோவை $(lx + my + nz)(l'x+m'y+n'z)$ என இருகாரணிகளாக்க முடிந்தால் இருபடிவரை இரு கோடாகச் சிதைகிறது.

குறிப்பு 2, அவ்வாறில்லை எனில் 5 புள்ளிகளின் கூறுகள் தரப்பட $a: b: c: f: \ g:h$ ஒரே வகைத் தாகக் காண முடியும். ஆகவே 5 புள்ளிகளின் வழி ஒரே இருபடி வரையுள்ளது.

8·7. *இருபடி வரையின் கோட்டுச்சமன்பாடு* (line equation of the conic)

இருபான்மையாக (l,m,n) என்பது ஒரு கோட்டின் கூறுகள் ஆனல், அவை $Al^2 +Bm^2 +Cn^2 + 2Fmn + 2Gnl + 2Hlm = 0$

எனும் சமன்பாட்டிற் கிணங்கினல் இருபடிவரை ஒன்றைத் தொடும்.

குறிப்பு 1. இங்கு A, B, C என்பவை எண்களைக் குறிப்பன.

குறிப்பு 2. இடப்பக்கம் இருகாரணிகளானல் சமன்பாடு இரண்டு புள்ளிகளைக் குறிக்கும்.

8·8. *இரண்டு இருபடி வரைகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள்* (meet of two conics)

ஒரு இருபடி வரையில் உள்ள புள்ளியை $\theta A^2 + \theta B + C$ எனவும் இன்னென்றில் உள்ள புள்ளியை $(a_1\varphi^2 + b_1\varphi + c^1)A + (a_2\varphi^2 + b_2\varphi + c_2)B + (a_3\varphi^2 + b_2\varphi + c_3)C$ எனவும் குறிக்க முடியும். இரண்டும் ஒரே புள்ளியைக் குறித்தால் $(a_2\varphi^2 + b_2\varphi + c_2)^2 = (a_1\varphi^2 + b_1\varphi + c_1)(a_2\varphi^2 + b_2\varphi + c_2)$ என φ எனும் மாறியும் நான்காம் படிச்சமன்பாடாகும். மூலங்கள் நான்கு உள்ளன. எனவே இரண்டு இருபடிவரைகளும் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

பயிற்சி

1. $S \equiv 0$, $S' \equiv 0$ என்பவை இரண்டு இருபடிவரையின் சமன்பாடுகளானல் $S + \lambda S' \equiv 0$ எனும் சமன்பாடு அவை வெட்டிக்கொள்ளும் நான்கு புள்ளிவழி இருபடி வரை என நிறுவுக.

   இதன் இருபான்மையைக் கூறுக.

2. $\Sigma = 0$ என்பது ஒரு இருபடி வரையின் கோட்டுச்சமன்பாடு. $w = 0$ $w' = 0$ என்பவை தனிப்புள்ளிகளின் சமன்பாடுகள் என்றல் $\Sigma + \lambda ww' = 0$ என்பவை $\Sigma = 0$ எனும் இருபடி வரையுடன் பொதுக்குவியமாகவுள்ள இருபடி வரைகளின் கோட்டுச்சமன்பாடு என நிறுவுக.

3. இரட்டைத்தொடுகையுடைய இருபடி வரைகளின் சமன்பாடுகளை (தக்க ஆதார முக்கோணத்தை எடுத்துக் கொண்டால்) $y^2 - xz = 0$. $y^2 - Rxz = 0$ என எழுத முடியும் எனக் காண்க.

4. முக்கைத்தொடுகை (Three point contact) உடைய இரு இருபடி வரைகளின் சமன்பாடுகளை $y^2 - zx = 0$ எனவும் $y^2 - zx + \lambda zy = 0$ எனவும் கொள்ள முடியும் என நிறுவுக.

8·9. தொடுகோடு, இசைப்புள்ளி இசைக்கோடு (Tangent, Pole and Polar)

$P_1 (x_1 y_1 z_1)$, $P_2 (z_2 y_2 x_2)$ எனும் இரு புள்ளிகள் வழியுள்ள கோட்டில் P எனும் புள்ளியின் கூறுகள் $(\lambda x_2 + \mu x_1, \lambda y_2 + \mu y_1, \lambda z_2 + \mu z\ )$ எனக் கூறலாம்.

இந்தப்புள்ளி $f(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ எனும் சமன்பாட்டுடைய இருபடி வரையின்மேல் இருந்தால் $R\ (1)\ \lambda^2 f_{22} + 2\lambda\mu f_{12} + \mu^2 f_{11} = 0$ என ஆகும்.

இங்கு

$$f_{11} = ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + 2fy_1z_1 + 2gz_1x_1 + 2\,hx_1$$

$$f_{12} = (ax\ + hy_1 + qz_1)\,x_2 + (hx_1 + by_1 + fy_1)\,y_2 + (gx\ + fy_1 + cz_1)\,z_2$$

$$f_{22} = ax_2^2 + by_2^2 + cz_2^2 + 2fy_2z_2 + 2gz_2x_2 + 2hx_2y_2$$

சமன்பாடு (1) $\dfrac{\lambda}{\mu}$ வில் இருபடிச் சமன்பாடு, ஆகவே இருபடி வரையிலும் கோட்டிலும் ஒருங்கே அமையும் இருபுள்ளிகளைத் தருகிறது.

(i) புள்ளி $P_1 (x_1 y_1 z_2) = 0$ இருபடிவரையில் இருந்தால் $f_{11} = 0$. $\therefore \dfrac{\lambda}{\mu} = 0$, அத்துடன் $P_1\ P_2$ தொடு கோடானல், மற்றொரு மூலமும் பூச்சியமாகவேண்டும். $\therefore f_{12} \equiv 0$.

$\therefore$ $P_2 (x_2 y_2 z_2)$ இன் இயங்குவரை P_1 ல் உள்ள தொடு கோடாகும். அதன் சமன்பாடு

$$(ax_1 + hy_1 + gz_1)x + (hx_1 + by_1 + fz_1)y + (qx_1 + fy_1 + cz_1)z = 0,$$

$$\left[\left(\frac{\delta f_{12}}{\delta x_1}\right) x + \left(\frac{\delta f_{11}}{\delta y}\right) y + \left(\frac{\delta f_{11}}{\delta z_1}\right) z = 0.\right]$$

(ii) $P_1\ P_2$ துணையியப் புள்ளிகள் ஆகுக. இருபடிவரை $P_1\ P_2$ எனும் கோட்டை வெட்டும் புள்ளிகள் P, P' ஆகுக.

$P\ (\lambda x_2 + \mu x_1,\ \lambda y_2 + \mu y_1,\ \lambda z_2 + \mu z_1)$ ஆகும்.
$P'\ (\lambda x_2 - \mu x_1,\ \lambda y_2 - \mu y_1,\ \lambda z_2 - \lambda z_1)$ ஆகும்.

$\therefore$ சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\dfrac{\lambda}{\mu}$, $\dfrac{-\lambda}{\mu}$ ஆகும். அவற்றின் கூடுதல் $= 0$.

∴ இருபுள்ளிகள் $P_1\,(x_1\;y_1\;z_1)$, $P_2\,(x_2\;y_2\;z_2)$ துணையியப் புள்ளிகளாக ஒரு இருப்படி வரைக்கு அமைய

$$(ax_1+hy_1+gz_1)x_2+(hx_1+by_1+fz_1)y_2+(gx_1+fy_1+cz_1)z_2=0$$

ஆக இருக்கவேண்டும்.

(iii) $P(x_1\;y_1\;z_1)$ இன் இசைக்கோரு. அதன் துணையியப் புள்ளியின் இயங்கு வரை. ஆகவே $P'\,(x_3\,y_3\,z_3)$ன் இயங்கு வரையின் சமன்பாடு

$$(ax_1+hy_1+gz_1)x+(hx_1+by_1+fz_1)z+(gx_1+fy_1+cz_1)z=0$$

8·10. இருபடிவரையின் கோட்டுச் சமன்பாடும், புள்ளிச் சமன்பாடும் (Line equation and point equation of a conic)

ஒரு இருபடிவரையின் புள்ளிச் சமன்பாடு $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ ஆகுக. அதன் மேல் $(x_1\;y_1\;z_1)$ ஒருபுள்ளியாகுக. அங்குள்ள தொடு கோட்டுச் சமன்பாடு

$$(ax_1+hy_1+gz_1)\;x+(hx_1+by_1+fz_1)z\times(gx_1+fy_1+cz_1)z=0$$

தொடுகோட்டின் கூறுகள் l, m, n என்றால்

$$ax_1+hy_1+gz_1=Rl$$

$$hx_1+by_1+fz_1=Rm$$

$$gx_1+fy_1+cz_1=Rn$$

அன்றியும் $lx_1+my_1+nz_1=0$ [$x_1\,y_1\,z_1$ எனும் புள்ளி $lx+my+n)=0$ எனும் கோட்டில் அமைவதால்]

$$\therefore \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & e & n \\ l & m & n & o \end{vmatrix}=0$$

(l,m,n) மாற, அதாவது கோடு மாற அதன் கூறுகள் இந்தச் சமன்பாட்டிற் கிணங்கியிருந்தால் அது மேற்கூறிய இருபடி வரையைத் தொடும். இதை விரித்தெழுத வரும் சமன்பாடு $Al^3+Bm^3+Cn^3+2\,Fmn+2\,Gnl+2\,Hlm=0$. இங்கு A, B, C, D, E, F, G, H என்பவை,

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$ எனும் அணி கோவையின் a, b, c, f, g, h ன் முறையே இணைக்காரணிகள் (Cofactor). இவ்வாறு ஒரு இருபடி, வரையின் புள்ளிச்சமன்பாடு தரப்பட்டால் அதன் கோட்டுச் சமன் பாட்டைக் காண்கிறோம். இதே போல கோட்டுச் சமன்பாட்டி லிருந்து புள்ளிச் சமன்பாட்டையும் காணலாம்.

கணக்கு 1. $y^2 - zx = 0$ எனும் புள்ளிச் சமன்பாட்டுடைய இருபடி வரையின் கோட்டுச்சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு: $lx + my + nz = 0$ எனும் கோடு இதை $(x_1\ y_1\ z_1)$ என்ற புள்ளியில் தொடட்டும். அப்போது தொடு கோட்டுச் சமன்பாடு $2\,yy_1 - (zx_1 + z_1x) = 0$

அல்லது $xz_1 - 2\,y_1y + x_1z = 0$

$$\therefore\quad l = z_1$$
$$m = -2y_1$$
$$n = x_1$$

$$lx_1 + my_1 + nz_1 = 0$$

$$\therefore\quad ln - \frac{m^2}{2} + ln = 0$$

$$\therefore\quad m^2 - 4\,ln = 0$$

(இதைப் பொது சூத்திரத்திலிருந்தும் காணலாம்.)

கணக்கு 2. $fyz + gzx + hxy = 0$ எனும் சமன்பாட்டுடைய இருபடி வரையின் தொடு கோட்டுச் சமன்பாடென்ன ?

தீர்வு: அணிகோவை $= \begin{vmatrix} o & h & g \\ h & o & f \\ g & f & o \end{vmatrix}$

$A = -f^2$ $B = -g^2$ $C = -h^2$ $F = gh$ $G = hf$ $H = fg$ கோட்டுச் சமன்பாடு $f^2l^2 + g^2m^2 + h^2n^2 - 2ghmn - 2hfnl - 2fglm = 0$ ஆகும்.

கணக்கு 3. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ எனும் சமன்பாடுடைய இருபடி வரையின் கோட்டுச் சமன்பாடென்ன ?

தீர்வு : அணிகோவை $\begin{vmatrix} a & o & o \\ o & b & o \\ o & o & c \end{vmatrix}$

$$\therefore\ A = bc \quad B = ca \quad C = ab$$

$$F = 0 \quad G = 0 \quad H = 0$$

$\therefore$ கோட்டுச் சமன்பாடு $bcl^2 + cam^2 + abn^2 = 0.$

அல்லது $\dfrac{l^2}{a} + \dfrac{m}{b} + \dfrac{n}{c} = 0.$

இதேபோல $Al^2 + Bm^2 + Cn^2 = 0$ என்பது இருபடி வரையின் கோட்டுச் சமன்பாடானால் அதன் புள்ளிச் சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{A} + \dfrac{y^2}{B} + \dfrac{z^2}{C} = 0$ ஆகும்.

8·11. இருபடி வரையின் சில சிறப்புச் சமன்பாடுகள் (Special forms for the equation of a Conic)

(i) $fyz + gzx + hxy = 0$

ஆதார முக்கோணத்தின் முனைகள் A, B, C இருபடி வரையில் அமையட்டும் பொதுச் சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2\,gzz + 2\,hzy = 0$$

$A\,(1, 0, 0)$, $B\,(0, 1, 0)$, $C\,(0, 0, 1)$ எனும் புள்ளிகள் இதில் அமைவதால் $a = b = c = 0$. ஆகவே சமன்பாடு $fyz + gzx + hxy = 0$ என ஆகிறது. இதே போல ஆதார முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் இருபடிவரைக்குத் தொடுகோடுகளானால் அதன் கோட்டுச் சமன்பாடு $Fmn + Gnl + Hlm = 0$ ஆகும்.

(ii) $ax^2 + by^2 + cz^2 \equiv 0$

ஆதார முக்கோணம் ABC இருபடி வரைக்குத் தன்னிசை முக்கோணம் ஆகுக. பொதுச் சமன்பாடு

$$ax^8 + by^8 + cx^8 + 2fyx + 2\,gxz + 2\,hxy = 0$$

$(x_1\ y_1\ x_1)$ இன் இசைக்கோடு

$$(ax_1 + hy_1 + gx_1)x + (hx_1 + by_1 + fx_1)y + (gx_1 + fy_1 + cz_1)x = 0$$

$(1, 0, 0)$ இன்னிசைக் கோடு $x = 0$ ஆகவேண்டும்.

$\therefore \; h = 0 \;\; g = 0$

$(0, 1, 0)$ இன் இசைக் கோடு $y = 0$ ஆகவேண்டும்.

$\therefore \; f = 0$

$\therefore$ இருபடிவுரையின் சமன்பாடு $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$

இதே போல ஆதார முக்கோணம் இருபடி வரைக்குத் தன்னிசை முக்கோணமானுல், வரையின் கோட்டுச் சமன்பாடு $Al^2 + Bm^2 + Cn^2 = 0$.

8·12. இரண்டு இருபடி வரைகளின் சிறப்புச் சமன்பாடு

இரண்டு இருபடி வரைகள் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளும். அவற்றுல் ஏற்படும் நாற்கோணத்தின் மூலை முக்கோணம் இரண்டு வரைகளுக்கும் தன்னிசையாகும். இதை ஆதார முக்கோணமாகக் கொள்ள சமன்பாட்டை

$S \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$

$S^1 \equiv a^1x^2 \rightarrow b^1y^2 + c^1z^2 = 0$ என எழுதலாம். தக்க அலகுப் புள்ளியைக் கொள்ள கூறுகளின் மாற்றங்களை $x' = \sqrt{a}x \; y' = \sqrt{b}y \; z' = \sqrt{c}z$ எனச் செய்யலாம். இதனுல் ஆதார முக்கோணம் மாறுவதில்லை. ஆனுல் $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$ என இருந்த புள்ளி மாற்றத்தினுல் அலகுப் புள்ளியாகும். அப்போது இரண்டு இருபடி வரைகளின் சமன்பாடு $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$ $a_1x'^2 - b_1y'^2 + c_1z'^2 = 0$ என மாறும்.

$[a_1 = \frac{a'}{a} \;\; b_1 = \frac{b'}{b} \;\; c_1 = \frac{c'}{c}$ ஆகும்.]

ஆகவே இரண்டு படிவரைகளுக்கு, அவற்றிற்குப் பொதுவாக உள்ள தன்னிசை முக்கோணமாகக் கொள்ள, சமன்பாடுகளை $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ எனவும் $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ எனவும் எழுதலாம்.

குறிப்பு: இதற்கொத்த கோட்டுச் சமன்பாடு

$l^2 + m^2 + z^2 = 0$

$Al^2 + Bm^2 + Cn^2 = 0$ ஆகும்.

கணக்கு: $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$
$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 0$ எனும் சமன்பாடுடைய வரைகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் கூறுகளைக் காணவும்.

(f, g, h) என்பது ஒரு புள்ளியானல்

$$af^2 + bg^2 + ch^2 = 0$$

$$a'f^2 + b'g^2 + c'h^2 = 0$$

$$\therefore \frac{f^2}{bc'-b'c} = \frac{g^2}{ca'-c'a} = \frac{h^2}{ab'-a'b} = 0$$

$\therefore$ புள்ளியின் கூறுகள் (f, g, h), $(-f, g, h)$, $(f, -g, h)$ $(f, g, -h)$ ஆகும். இங்கு $f = \sqrt{bc' - b'c}$; $g = \sqrt{ca' - c'a}$ $h = \sqrt{ab'-a'b}$, கூறுகளை $(f, \pm g \pm h)$ என எழுதலாம்.

8·13, இருபடி வரையில் தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசை

இருபடிவரையின் சமன்பாடு $y^3 - xz = 0$ எனக் கொள்வோம். அதன்மேல் உள்ள P யின் கூறுகள் $(\theta^2, \theta, 1)$ P' இன் கூறுகள் $(\varphi^2\ \varphi, 1)$. இவை ஒன்றற்கொன்று $(1-1)$ தொடர்புடையன என்றல் $p\theta\varphi + q\theta + r\varphi + s = 0$ என இருக்க வேண்டும். அத்துடன், இவற்றின் ஒன்றுசேர்புள்ளி, A, C ஆக இருக்க [ஆதார முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் இருபடிவரையைத் தொடும் புள்ளிகள் A, C].

$p\theta^2 + (q+r)\theta + s = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\theta = \infty$, $\theta = 0$ ஆகவேண்டும். $\therefore P = 0;\ s = 0$

$$\therefore\ q\theta + r\varphi = 0 \qquad \ldots (1)$$

$\therefore$ PP' ன் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \theta^2 & \theta & 1 \\ \varphi^2 & \varphi & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore\ x(\theta-\varphi) - y(\theta^3 - \varphi^3) + z\theta\varphi(\theta-\varphi) = 0$$

$$x - y(\theta + \varphi) + \theta\varphi = 0 \qquad \ldots (2)$$

φ க்கு (1) யிலிருந்து பிரதியிட $rx + (q-r)\theta y - q\theta^2 z = 0$, இந்தக் கோட்டின் கூறுகள் $[r_1\ (q-r)\ \theta_1 - q\theta^2]$

$$l = r \quad m \ldots (q-r)\theta \quad n = -\ q\,\theta_2$$

∴ $qrm^2 + (q - r)\,ln = 0$ எனும் இருபடிவரையை θ மாறும் போது கோடு தழுவுகிறது,

ஒரு இருபடி வரையில், இரு தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசைகளின் ஒத்த புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடுகள் அந்த இருபடி வரையுடன் ஒன்றுசேர் புள்ளிகளில் இரட்டைத் தொடுகையுள்ள மற்றொரு இருபடி வரையைத் தழுவுகின்றன.

குறிப்பு 1. $q = r$ என்றால் தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசைகள் அடுக்குப்புள்ளி வரிசைகள் ஆகின்றன. சமன்பாடு $qrm^2 = 0$ என ஆகிறது. அதாவது புள்ளியைப் பொருந்தும் புள்ளியாக B ஐக் குறிக்கிறது. அதாவது PP' எனும் கோடுகள் B வழிச் செல்கிறது எனக் காட்டுகிறது.

குறிப்பு 2. இதன் இரு பான்மையாக: தொடர்புடைப் புள்ளி வரிசையில் உள்ள புள்ளிகளில் உள்ள தொடு கோடுகளும், தொடர்புடைக் கோடுகளாகவுள்ளன. ஒத்த கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் இயங்குவரை, கொடுக்கப்பட்ட இருபடி வரையின் ஒன்றுசேர் கோடுகள் தொடும் புள்ளிகளில் இரட்டைத் தொடுகையுள்ள மற்றொரு இருபடி வரையாகும்.

தொடு கோடுகள் அடுக்கு வரிசையில் அமைந்தால் ஒத்த கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் ஒன்றுசேர் கோடுகள் தொடும் புள்ளிகள் வழியுள்ள இருபடி வரையின் நாணில் அமையும்.

8·14. ஒரு இருபடி வரையில் அமையும் இரு புள்ளி வரிசைகளிடையே (2-2) தொடர்பு

$y^3 - xz = 0$ என்பது இருபடி வரையின் சமன்பாடாகுக. அதன்மேல் P எனும் புள்ளியின் துணையலகு θ; P' எனும் புள்ளியின் துணையலகு φ; ஆகவே அவற்றின் கூறுகள் முறையே $(\theta^3, \theta, 1)$; $(\varphi^3, \varphi^3, 1)$ ஆகும்.

θ, φ இவையிடையே ஒரு தொடர்பைத் தரும் சமன்பாடு $\theta^2\,(a\varphi^2 + h_1\varphi + g_1) + \theta\,(h_2\varphi^2 + b\varphi + b_2) + (g_2\varphi^2 + f^2\,\varphi + c) = 0$ ஆகுக. ஆகவே θ வின் ஒரு மதிப்புக்கு φ க்கு 2 மதிப்பும் வருகின்றன. ஆகவே முதல் புள்ளி வரிசை P க்கு, இரண்டு P' புள்ளிகளும் ஒரு P' புள்ளிக்கு இரண்டு P புள்ளிகளும் வருகின்றன. இத்தகைய (2-2) தொடர்பின் ஒரு சிறப்பாகவுள்ள ஒரு படத்தான தொடர்பைக் காண்போம். தொடர்பைத் தரும் சமன்பாடு $\theta\,(a^3\varphi^4 + h\varphi + g) + \theta\,(h\varphi^4 + b\varphi + f) + (g\varphi^4 + f\varphi + c) = 0$ ஆகுக.

இதையே φ ல் இருபடிச் சமன்பாடாக எழுத

$$\varphi^2 (a\theta^2+h\theta+g)+\varphi(h\theta^2+b\theta+f)+(g\theta^2+f\theta+c)=0$$

என வருவதைக் காணலாம்.

ஆகையால் P எனும் புள்ளியை முதல் வரிசையாகக் கொள்ள இரண்டாவது வரிசையில் $P_1' P_2'$ வந்தால் அதையே இரண்டாவது வரிசையில் கொண்டால் $P_3' P_2'$ முதல் வரிசைப் புள்ளிகளாகும்.

$\theta, \varphi,$ ல் சமன்பாடு ஒரு படித்தானது [Symmetrical (2-2) Correspondence].

தொடர்பைத்தரும் சமன்பாடுகள் a, b, c, f, g, h எனும் ஆறு எண்களின் விகிதங்கள். அதாவது 5 விகிதங்கள் தரப்பட்டால், வருமாதலால் 5 ஒத்த சோடிப் புள்ளிகள் தரப்பட தொடர்பு நிச்சயமாகும்.

$P' (\varphi^3, \varphi, 1)$ எனும் புள்ளி, வேறொரு இருபடி வரைக்கு $P(\theta^2, \theta, 1)$ எனும் புள்ளியின் துணையியப் புள்ளியாக இருக்கவுள்ள நியதியைச் சமன்பாடு (1) தருகிறது.

இவ்வாறு ஒருபடித்தான (2–2) தொடர்புள்ள புள்ளிகள் P, P' ஐச் சேர்க்கும் கோடுகள் ஒரு இருபடிவரையைத் தழுவும் என நிறுவுவோம்.

இருபடிவரையின் சமன்பாடு $y^3-xz=0$ அதன்மேல் உள்ள இரு புள்ளிகள் $P(\theta^2, \theta, 1)$, $P'(\varphi^2, \varphi, 1)$.

PP' ன் சமன்பாடு $x-(\theta+\varphi)y+\theta\varphi z=0$

இந்தக் கோட்டின் கூறுகள் l, m, n ஆனல்

$$l : m : n = 1 : -(\theta+\varphi) : \theta\varphi$$

ஒருபடித்தான (2 — 2) தொடர்பைத் தரும் சமன்பாடு $\theta^2 (a\varphi^2 + h\varphi + \varphi) + \theta(h\varphi^2 + b\varphi + b) + (g\varphi^2 + fl + C) = 0$

இதையே கீழ்க்கண்டவாறும் எழுதலாம்.

$$a\theta^2\varphi^2+h\theta\varphi(\theta+\varphi)+g\{(\theta+\varphi)^2-2\theta\varphi\}+d\theta\varphi+f(\theta=\varphi)+c=0$$

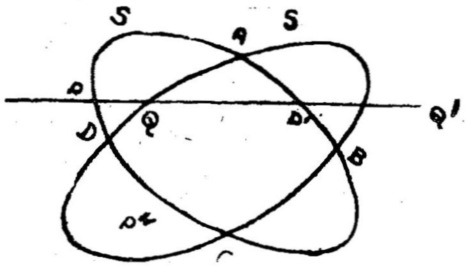
$$\therefore \quad an^2-hmn+g(m^2-2ln)+bln-flm+cl^2=0$$

இது ஒரு இருபடிவரையின் கோட்டுச் சமன்பாடு. $\therefore$ $PP,$ எனும் கோடுகள் இருபடிவரையைத் தழுவுகின்றன.

8·16. இசைத் தழுவுவரை (The harmonic envelope)

S, S' என்பவை இரு இருபடிவரைகள். S எனும் இருபடிவரையை ஒரு கோடு, S' ஐ அது வெட்டும். இரண்டு புள்ளிகளின் இசைப் புள்ளி வரைகளில் வெட்டுகிறதென்றால், அத்தகைய கோடுகள் தழுவும்வரை, ஒரு இருபடி வரையாகும். அதற்கு S, S' எனும் இரண்டு இருபடி வரைகளின் இசைத்தழுவு வரை எனப் பெயராகும்.

நிரூபணம் : S எனும் இருபடி வரையில் P எனும் புள்ளியைக்



படம். 61

கொள்க., S' க்கு அந்தப் புள்ளியின் இசைக்கோடு S ஐ P', P'' எனும் புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். P க்கு S'ன் துணையியப் புள்ளிகளாக S ன் மேல் இரண்டு புள்ளிகள் இவ்வாறு காண்கிறோம். இதே போல P' க்கு, S' ன் துணையியப் புள்ளிகளாக Sன் மேல் இரண்டு புள்ளிகள் உள்ளன. அவற்றில் ஒன்று P. இவ்வாறு PP' இடை ஒருபடித்தான (2—2) தொடர்பைக் காண்கிறோம் ஆகவே PP' மாறும்போது ஒரு இருபடிவரையைத் தழுவும்.

[P, P' எனும் புள்ளிகள் S ன் மேல் S' க்கு துணையியப் புள்ளிகள். ஆகவே அவை ஒருபடித்தான (2—2) தொடர்புடையவை எனக் கூறிவிடலாம்,]

குறிப்பு: S, S' எனும் இருபடி வரைகள் A, B, C, D எனும் புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளட்டும். Sல் P எனும் புள்ளி A யுடன் பொருந்த அதன் வழியுள்ள கோடு S' ஐ P யிலேயே வெட்டும். அதாவது Q வும் P யுடன் பொருந்தும். $(PP', QQ') = -1$ என்பதில் Q பொருந்தினால் Q' ம் பொருந்தும்; அல்லது P' ம் பொருந்தும். ஆகவே தழுவுவரையைத் தொடும் கோடுகளில் S, S' எனும் இரண்டு இருபடிவரைக்கும் A யில் உள்ள இரண்டு தொடு கோடுகளும் உள்ளன. இதேபோல மற்ற வெட்டும் புள்ளிகளிலும்.

ஆகவே, இரண்டு இருபடி வரைகளை இசைப்புள்ளி வரிசைகளில் வெட்டும் கோட்டின் தழுவுவரை—இசைத் தழுவுவரை—அந்த இருபடி வரைகள் வெட்டும் புள்ளிகளில் உள்ள 8 தொடுகோடுகளையும் தொடும் ஒரு இருபடிவரையாகும். [இதை Φ Conic எனக் கூறுவர்.]

8·16. இசைப்புள்ளிவரை **(Harmonic locus of two conics)**

மேற்கூறியதின் இருபான்மை :—F இருபடிவரை எனப்படும் இசைப்புள்ளிவரையாகும்.

S, S′ என்பன இரண்டு இருபடிவரைகள். அவற்றிற்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்துள்ள இரு சோடித் தொடுகோடுகள், இசைக் கோட்டுக்கற்றையானல், அந்தப் புள்ளியின் இயங்குவரை, S,S′ ஐ அதன் நான்கு பொதுத்தொடுகோடுகள் தொடும் 8 புள்ளிகள் வழியுள்ள இருபடிவரையாகும். இதுவே S, S′ ன் F இருபடிவரை.

குறிப்பு 1. S′ எனும் இருபடிவரை X, Y எனும் இருபுள்ளிகளாகச் சிதைந்தால், S, S′ ல் F இருபடிவரை X, Y வழியாகவும், S ஐ அப்புள்ளிகளிலிருந்துள்ள தொடு கோடுகள் தொடும் 4 புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் இருபடி வரையாகும்.

குறிப்பு 2. X, Y எனும் புள்ளிகள் I, J எனும் தனிப் புள்ளிகளானல் F இருபடிவரை S ன் குத்துத் தொடு கோட்டு வட்டமாகிறது.

இரண்டு இருபடி வரைகள், அவற்றின் **P, Φ** இருபடி வரைகள் இவை நான்கிற்கும் பொதுவான ஒரு தன்னிசை முக்கோணம் உள்ளது.

S, S′ என்பவை இரு இருபடி வரைகள். இவற்றின் நான்கு பொதுத் தொடு கோடுகள் ஒரு நாற்கரமாகின்றன. அதன் மூலை முக்கோணம் XYZ ஆகுக. இரண்டு பொதுத் தொடு கோடுகள் PQ, P′ Q′, XZ ல் V ல் சந்திக்கட்டும்.

PQ, P′ Q′ எனும் நாற்கோணத்தின் மூலை முக்கோண முனை U இதன் (S, S′ க்கு) இசைக் கோடாகிய X Z ல் இருப்பதால், PP′, QQ′ Y ல் சந்திக்கின்றன. ஆகவே Y இரண்டாவது முனை. PQ′, XZ ஐ V ல் சந்திக்கட்டும். இரண்டு இருபடி வரைகளுக்கு XZ ன் இசைப்புள்ளி Y ஆதலால் V (PP′, XY), V (QQ′ XY) எனும் இரண்டு கோட்டுக் கற்றைகளும் இசைக் கோட்டுக்கற்றைகள்.

V, P, Q′ ஒரு கோடமைபவை,

∴ *VP′, Q ம் ஒரு கோடமைபவை.*

∴ மூன்ருவது மூலே முக்கோண முனை V.

இவ்வாறு YUV என்பது $PQ\,P'\,Q'$ எனும், நாற்கோணத்தின் மூலே முக்கோணம். ஆதலால் $PQ\,P'\,Q'$ வழியுள்ள இருபடி வரைகளுக்கு அது தன்னிசை முக்கோணமாகும்.

F இருபடிவரை P, Q, P', Q' வழிச் செல்வதால் Fக்கு Yன் இசைக் கோடு UV அல்லது XZ. இதே போல X, Zன் இசைக் கோடுகள் முறையே YZ, XY ஆகும்.

∴ XYZ என்பது Fன் தன்னிசை முக்கோணம் ஆகும். இருபான்மையாக, φ இருபடி வரைக்கும் XYZ தன்னிசை முக்கோணம் ஆகும்.

பயிற்சி

1. இரு இருபடி வரைகளின் சமன் பாடுகள் $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, $x^2 + y^2 + x^2 = 0$ அவற்றின் F இருபடி வரையின் சமன்பாடு $a\,(b+c)\,x^2 + b\,(c+a)\,y^2 + c\,(a+c)\,x^2 = 0$ எனவும் Φ இருபடிவரைச் சமன் பாடு $(b+c)\,l^2 + (c+a)\,m^2 + (a+b)\,n^2 = 0$ எனவும் காண்க. இதனுல் நான்கு இருபடி வரைகளுக்கும் ஒரே தன்னிசை முக்கோணம் உள்ளதென்றும் காண்க.

2. ஒரு வட்டம், செவ்வக அதிபரவளைவு இவற்றின் Φ இருபடிவரை ஒரு பரவளைவு என நிறுவுக.

3. இரண்டு குத்து வட்டங்களின் இசைத் தழுவு வரை அவற்றின் மையங்கள் எனக் காண்க.

4. ஒரு பரவளைவின் முனையை மையமாகவுடைய வட்டத்திற்கும், பரவளைவுக்கும் உள் இசைத்தழுவு வரை யாது?

5. இரு இருபடிவரைகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளில் உள்ள தொடு கோடுகள் குத்துக் கோடுகளானல் நான்கு புள்ளிகளும் ஒரு வட்டத்தில் அமையும் எனக் காண்க. (இசைத் தழுவு வரையின் குத்துத் தொடு கோட்டு வட்டம்)

9. இசைப் பண்பு மாற்றம்
(Reciprocation)

9·1. விளக்கம்

தளத்தில் ஒரு இருபடிவரை Σ வைக் கொள்வோம். $\{A, B, C \dots\}$ என்பவை புள்ளிகள். $\{l, m, n \dots\}$ இவைகள் கோடுகள். புள்ளிகளின் இசைக் கோடுகள் $\{a, b, c \dots\}$ ஆகுக. கோடுகளின் இசைப் புள்ளிகள் $\{L, M, N \dots\}$ ஆகுக. இவ்வாறு Σ எனும் இருபடி வரையின் உதவியால், புள்ளிகளைக் கோடுகளாகவும் கோடுகளைப் புள்ளிகளாகவும் மாற்ற முடிகிறது. இசைக் கோடுகளாகவும், இசைப் புள்ளிகளாகவும் மாற்றுவதால், இம் மாற்றத்தை இசைப் பண்பு மாற்றம் (Reciprocation) என்போம். புள்ளிகளைப் பெரிய எழுத்தாலும், கோடுகளைச் சிறிய எழுத்தாலும் குறிப்போம்.

தேற்றம் 1. (i) **AB** யின் இசைப் பண்பு மாற்றங்கள் **P** யில் சந்தித்தால், **AB** எனும் கோட்டின் இ. ப. மாற்றம் **P** ஆகும்.

(ii) **a, b,** எனும் கோடுகளின் இ. ப. மாற்றங்கள் **p** எனும் கோட்டில் அமைந்தால் **AB**, எனும் புள்ளியின் இ.ப. மாற்றம் **p** ஆகும்.

(*iii*) **A, B, C, D** என்பவை **l** எனும் கோடமையின் இவைகளின் இ. ப. மாற்றங்கள் **a, b, c, d, l** ன் இ. ப. மாற்றமாகிய **L** வழிச் செல்லும் கோடுகளாகும்.

(iv) **a, b, c, d** எனும் கோடுகள் **L** வழிச் செல்லும் கோடுகளானல், அவற்றின் இ. ப. மாற்றம் **L** ன் இ. ப. மாற்றமாகிய **l** எனும் கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள் **A, B, C, D** ஆகும்.

இவையாவும் *A* ன் இசைக்கோடு *B* வழிச்சென்ருல் *B* ன் இசைக்கோடு *A* வழிச்செல்லும் எனும் தேற்றத்தின் பயனும், அதன் இருபான்மைத் தேற்றத்தின் பயனுமாகும்.

தேற்றம் 2. $l\{AB; CD\}$ யின் குறுக்கு விகிதமும் அவற்றின் இ. ப. மாற்றமாகிய $L(ab; cd)$ யின் குறுக்கு விகிதமும் ஒன்றே.

இது ஒரு கோடமையும் புள்ளிகளும், அவற்றின் இசைக் கோட்டுக்கற்றைகளும் ஒருபடித்தொடர்புடையன எனும் உண்மையின் பயனால் வருகிறது.

குறிப்பு 1. மேலே, புள்ளிகள், கோடுகள் இவற்றின் இ.ப. மாற்றத்தைக் கூறினோம். இங்கு ஒரு வரையின் இ. ப. மாற்றம் என்ன என்பதைக் கூறி, இருபடி வரையின் இ. ப. மாற்றத்தைக் குறிப்பாக விவரிப்போம்.

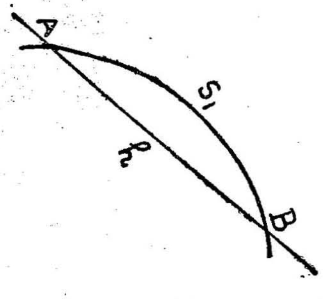
குறிப்பு 2. Σ எனும் இருபடி வரைக்கு இசைக்கோடுகள் இசைப்புள்ளிகளைக் கொள்வதால் அதை ஆதார இருபடிவரை **(Basic conic)** என்போம்.

ஒருவரையின் இசைப்பண்பு மாற்றம்

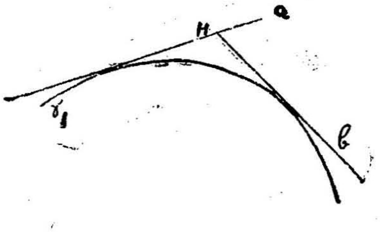
S_1 என்பது ஒரு வரையாகுக. அதன் மேல் அடுத்தடுத்து புள்ளிகள் $P_1\ P_2\ P_3$ ... என்பவற்றைக் கொள்ளவும். Σ என்பது ஆதார இருபடிவரை ஆகுக. P_1, P_2, P_3 ... என்பவை தொடர்ந்து அடுத்தடுத்த புள்ளிகளாவதால், அவற்றின் இ. ப. மாற்றம். அடுத்தடுத்த கோடுகள் p_1, p_2, p_3.... ஆகும். ஆகவே இவை தழுவும் வரை (envelope) σ_1 என்றால் σ_1 என்பது S_1 ன் இசைப்பண்பு மாற்ற வரை எனப்படும்.

தேற்றம்: σ_1 என்பது S_1 ன் Σ எனும் ஆதார இருபடி வரைக்கு இ. ப. மாற்றமானால் S_1 ன் எனும் வரை σ_1 ன் வரையின் இ. ப. மாற்றமாகும்.

S_1 எனும் வரையில் அடுத்தடுத்த புள்ளிகள் A, B வழி கோடு



படம். 62



படம். 63

h ஆகுக. Σ எனும் ஆதார வரைக்கு அவற்றின் இசைக் கோடுகள் a, b. H ல் வெட்டட்டும். அப்போது H என்பது h ன் இசைப்பண்பு மாற்றமாகும். B, எனும் A ஐ நெருங்கும்போது எல்லையில் AB எனும் கோடு—அதாவது h—S_1 எனும் வரைக்குத் தொடு கோடாகும். அதே போல, H எனும் புள்ளி r_1 ல் அமையும். அதாவது h என்பது H ன் இ, ப. மாற்றமாகும். ஆகவே S_1 எனும் வரை r_1 ன் இ. ப. மாற்ற வரையாகும்.

தேற்றம் **:—இருபடி வரையின் இ. ப. மாற்ற வரையும் இருபடி வரையாகும்.**

$P(A\ B\ C\ D....)$, $Q(A\ B\ C\ D...)$ எனும் இரு தொடர்புடை கோட்டுக்கற்றைகள் S_1 எனும் இருபடிவரையில் உள்ள புள்ளிகள் $ABCD$ ... P, Q என்பவற்றைத் தருகின்றன.

இ. ப. மாற்றத்தால் இவை $p(abcd...)$, $q(abc...)$ எனும் இரு கோடமையும் தொடர்புடைப் புள்ளிவரிசைகளாகின்றன. ஆகவே p, q. a, b, c...எனும் கோடுகள் ஒரு (கோட்டு) இருபடிவரையைத் தழுவுகின்றன. இது ∽ என்றால், ∽, S_1 இன் இ. ப. மாற்ற மாகிறது. இவ்வாறு புள்ளி இருபடிவரையின் மாற்றம் கோட்டு இருபடிவரை. ஆனால் இரண்டும் இருபடிவரை என்றே கூறியுள்ளோம். ஆகவே ஒரு இருபடி வரையின் வரை இ. ப. மாற்றம், இன்னொரு இருபடிவரையாகும்.

தேற்றம் **: (i) S_1 எனும் வரைக்கு B எனும் புள்ளியின் இசைக் கோடு b ஆனால், இசைப்பண்பு மாற்ற வரை S_1' க்கு B யின் இ. ப. மாற்றம், 'b' இன் இ. ப. மாற்றத்தின் இசைக்கோடாகும்.**

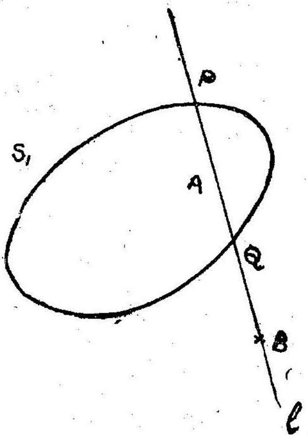
(ii) S_1 எனும் வரைக்கு P, Q என்பவை இரு துணையியப் புள்ளிகளானால், இ. ப. மாற்றவரை S_1 க்கு p, q எனும் P, Q இன் இ. ப. மாற்றம் துணையியக் கோடுகளாகும்.

(iii) S_1 எனும் வரைக்கு PQR எனும் முக்கோணம் தன்னிசை முக்கோணமானால், இ.ப. மாற்றவரை S_1'க்கு முக்கோணத்தின் இ. ப. மாற்றமும் தன்னிசை முக்கோணமாகும்.

இவற்றின் நிரூபணம் எளிது. ஏனெனில் இசைப்புள்ளிவரிசை, இசைக்கோட்டுக் கற்றையாக மாறுதலின் விளைவே இவை.

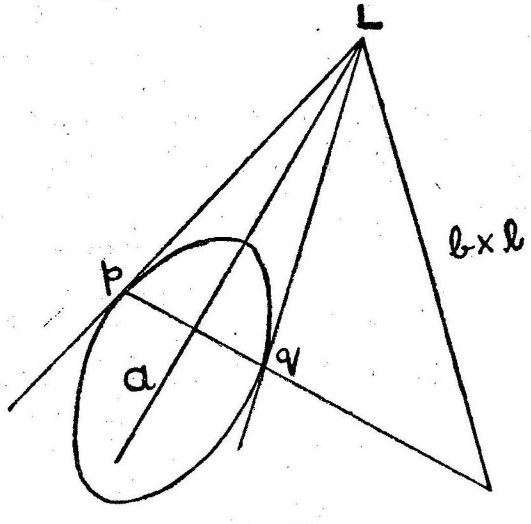
நிரூபணம் **:** (i) B வழி PQ என்பது, S_1 ன் ஒரு நாண். A B யின் PQ வுக்கு இசைத்துணைப்புள்ளி; PQ மாறும்போது A யின் நிலை B யின் இசைக்கோட்டில் மாறும். Σ எனும் ஆதார இருபடி வரைக்கு இ. ப. மாற்றம் செய்ய S_1 என்பது S_1' ஆகிறது. B என்பது b எனும் கோடாகிறது. l எனும் நாண் L புள்ளியாகிறது.

P, *Q* எனும் புள்ளிகள் S_1' க்குத் தொடுகோடுகள். *A* எனும் புள்ளி



படம். 84

b இன் *p*, *q* க்கு இசைத் துணைக்கோடாகிறது. ஆகவே அது *l* இன் இசைப்புள்ளி *B'* வழிச்செல்லும். *L* மாறும்போது *a* மாறினாலும்



படம். 65

அது எப்போதும் *B'* வழிச்செல்லும். ஆகவே *A* யின் நிலைமாறும் கோடு, அதாவது *B* யின் இசைக்கோடு *B'* எனும் புள்ளியாகிறது. இவ்வாறு S_1 க்கு ஒரு புள்ளியும் அதன் இசைக்கோடும், S_1' க்கு ஒரு கோடும் அதன் இசைப்புள்ளியாக மாறுகிறது.

மற்றவை இதிலிருந்து எளிதில் புலனுகும்.

குறிப்பு 1. ஆதார இருபடிவரை Σ ன் மையம் O ஆகுக. அப்போது அது தளத்தில் உள்ள தனிக்கோடு IJ யின் இசைப் புள்ளியாகும். S_1, எனும் இருபடி வரையின் மையம் C தனிக் கோட்டின், இசைப்புள்ளியாகும். இ.ப. மாற்றத்தில் S_1 எனும் இருபடிவரை S_1' ஆகிறது. தனிக்கோடு O ஆகிறது. ஆகவே S_1 ன் மையம் C ஆனது S', க்கு O வின் இசைக்கோடாக மாறுகிறது.

குறிப்பு 2. தனிக்கோடு (Absolute line or line at infinity) O ஆகவும், O, தனிக்கோடாகவும் மாறுகிறது.

குறிப்பு 3. S_1 க்கு மையத் தொடுகோடுகள் (asymptotes) இரண்டு புள்ளிகளாக மாறுகின்றன. அவை, S_1' க்கு; Oவின் இசை கோடு அதை வெட்டும் புள்ளிகளாகும்.

குறிப்பு 4. Σ ன் மையம் S_1 ன் மேல் இருந்தால் அதன் இ. ப. மாற்றம் S_1' ஆனது பரவளேவு ஆகும்.

இவை யாவும் மேற்கூறிய தேற்றத்தின் விளேவாகும்.

குறிப்பு: இசைப்பண்பு மாற்றமும், இருபான்மை நெறித் தத்துவமும் ஏறக்குறைய ஒன்றே. ஆனுல் இசைப்பண்பு மாற்றத் தில், ஒரு ஆதார இருபடி வரை வேண்டும். அதுதான் புள்ளியைக் கோடாகவும் கோட்டைப் புள்ளியாகவும் மாற்றுகிறது. மாற் றத்தை எழுதக் கீழ்வரும் பட்டியல் உதவும்.

$\longleftrightarrow$

புள்ளி	கோடு
ஒரு புள்ளி வழி	ஒரு கோடமை
இருபுள்ளி வழிக் கோடு	இரு கோடு சேர் புள்ளி
நாற்கோணம்	நாற்கரம்
புள்ளி வரிசை	கோட்டுக் கற்றை
இயங்கு வரை	தழுவு வரை
இருபடிவரை மேல்புள்ளி	இருபடி வரையின் தொடு கோடு
இருபடிவரையியக் கோடு வெட்டும் புள்ளிகள்	இருபடிவரைக்கு ஒருபுள்ளி யிலிருந்து தொடுகோடுகள்
இசைப்புள்ளி	இசைக்கோடு
படி (degree)	இனம் (class)

$\longleftrightarrow$ என்பது இருபுறமாற்றத்தையும் குறிக்கும்.

பயிற்சி

1. இரண்டு இருபடி வரைகள் ஒன்றையொன்று தொட்டால், இ. ப. மாற்ற வரைகளும் ஒன்றை யொன்று தொடும் எனக் காட்டு.

2. இரண்டு இருபடி வரைகளின் பொது நாணின் இ. ப. மாற்றம் என்ன ? அவற்றின் பொதுத்தொடு கோட்டின் இ. ப. மாற்றம் என்ன ?

3. கீழ்க்காண்பவற்றின் இ. ப. மாற்றம் கூறுக. இருபடி வரைக்கு (i) இரு இணைத் தொடு கோடுகள் (ii) இரு இணை நாண்கள் (iii) இரு துணையிய விட்டங்கள்.

4. S_1 எனும் இருபடிவரைக்கு $P\ Q\ R$ ஒரு தன்னிசை முக்கோணம். அதன் பக்கங்கள் S_2 எனும் இருபடி வரையைத் தொடுகின்றன. இதன் இ. ப. மாற்றம் என்ன ?

5. ஆதார இருபடி வரையின் மையம் A. மூன்று கோடுகளைத் தொட்டும் A வழியும் செல்லும் இருபடி வரைகளின் மையத்தின் இயங்கு வரை இருபடி வரையாகும். இதன் இ. ப. மாற்றத்தை எழுதுக.

6. Σ என்பது ஆதார இருபடி வரை. S_1 எனும் இருபடி வரையின் இ. ப. மாற்றம் S_3' என்றால் மூன்று இருபடி வரைகளுக்கும் பொதுவாக ஒரு தன்னிசை முக்கோணம் உளது என நிறுவுக.

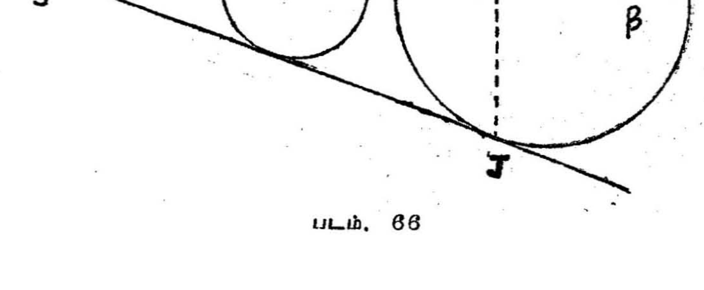
10. புள்ளி, இசைப்பண்பு மாற்றம் (Point reciprocation)

விளக்கம்

ஆதார இருபடிவரை வட்டமானல், அத்தகைய இ.ப. மாற்றம் புள்ளி இசைப் பண்பு மாற்றம் (*Point rcciprocation*) எனப் படும். வட்டமையம் *O* ஆனல், *O* வைப் பற்றிய இ. ப. மாற்றம் எனப்படும். வட்டஆரம் *R* ஆனல், இ. ப. மாற்ற ஆரம் *R* எனப் படும். ஆனல் *R* ன் அளவு அவ்வளவு முக்கியமல்ல. *O* வின் நிலையே முக்கியம். ஒரு இருபடி வரையின் குவியத்திற்கு, புள்ளி இ. ப. மாற்றம் ஒரு வட்டம் என வருவதே இதன் முக்கியத்துவம். இதைக் கீழே நிரூபிப்போம்.

தேற்றம்: ஒரு இருபடி வரையின் இ. ப. மாற்றம் அதன் குவியத்திற்கு, ஒரு வட்டமாகும்.

Σ என்பது இருபடி வரையாகுக. அதன் குவியம் *S* ஆகுக.

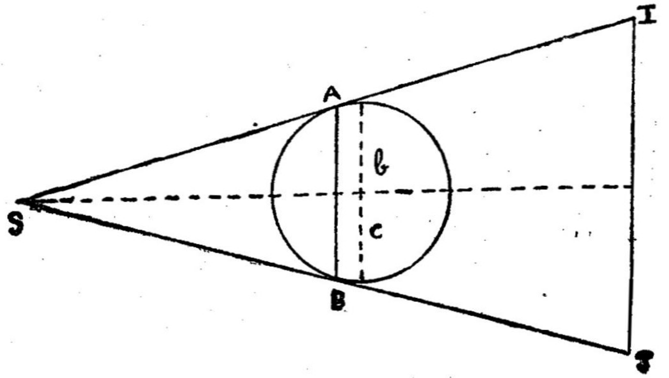


படம். 66

IJ என்பவை தனிப்புள்ளிகளானல், *SI SJ* என்பவை Σ வுக்குத் தொடு கோடுகளாகும். *S* ஐ மையமாகவுடைய ஆதாரவட்டம் *IJ* வழிச் செல்வதுடன் *SI, SJ* அதற்கு *I, J* வில் உள்ள தொடு கோடுகளாகும்.

இ.ப. மாற்றத்தில் *SI* எனும் ஆதார வட்டத்திற்குள்ள தொடு கோட்டின் அதன் இசைப்புள்ளி *I. SI,* Σ வைத் தொடுவதால், Σ வின் இ.ப. மாற்றம் *SI* ன் இ.ப. மாற்றப் புள்ளி வழிச் செல்லும். ஆனல் *SI* ன் இ.ப.மாற்றம் *I* ஆகும். ஆகவே Σ ன் இ.ப. மாற்றமாகிய Σ′,*I* வழிச் செல்லும், [அதேபோல Σ′,*J* வழியும் செல்லும். அன்றியும் Σ வின் இ.ப. மாற்றம் ஒரு இருபடி வரை என்று கூறியுள்ளோம். ஆகவே Σ ன் இ.ப. மாற்றமாகிய Σ′, *IJ* வழிச்செல்லும்] இருபடிவரையாகும். அதாவது வட்டமாகும்.

குறிப்பு 1. *S* எனும் புள்ளிக்கு ஒரு வட்டத்தின் இ.ப. மாற்றம் *S* ஐ ஒரு குவியமாக வுடைய இருபடி வரையாகும்.



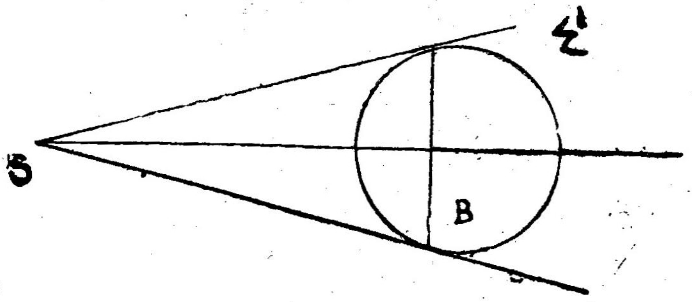
படம். 67

குறிப்பு 2. *S* எனும் புள்ளி, வட்டத்தின்மேல் இருந்தால் இருபடி வரை பரவளைவு ஆகும். ஏனெனில் *S* இன் இ.ப. மாற்றமாகிய தனிக்கோடு இருபடிவரையைத் தொடுவதால்.

குறிப்பு 3. இருபடிவரை Σ வின் மையம் *C* ஆகுக. அப்போது *C* என்பது Σ வுக்கு *IJ* ன் இசைப்புள்ளி இ.ப. மாற்றத்தில், *IJ* எனும் தனிக்கோடு *S* ஆகிறது. ஆகவே *C* எனும் மையம் Σ வின் இ.ப. மாற்றமாகிய வட்டத்திற்கு இசைக்கோடு ஆகும்.

குறிப்பு 4. இருபடி வரையின் சிறு அச்சு b (minor axis)

S லிருந்து இசைக்கோடுக்குள்ள குத்தடி B ஆகும்.

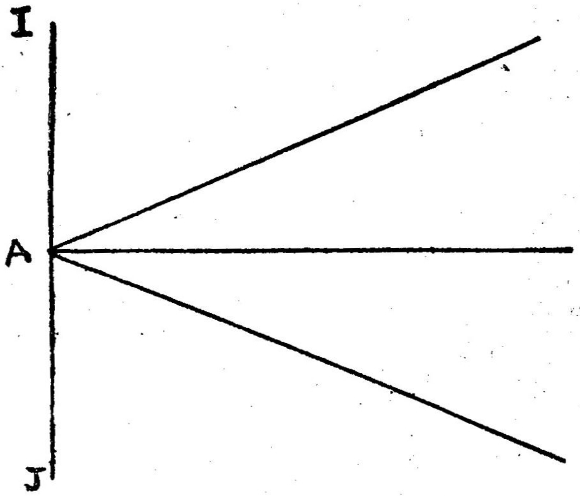


படம். 68

குறிப்பு 5. Σ வுக்கு Sன் இசைக்கோடு அதன் இயங்குவரைக் கோடு (Directrix). இ. ப. மாற்றத்தில், S என்பது தனிக்கோடு IJ ஆகிறது. ஆகவே இயக்குவரைக்கோடு (*Directrix*) IJன் இசைப் புள்ளி (Σ' எனும் வட்டத்திற்கு) ஆகிறது. அதாவது வட்டமையம் ஆகிறது. இவ்வாறு எந்தக்கூவியத்திற்கு புள்ளி இ. ப. மாற்றம் செய்கிறோமோ அதைச் சார்ந்த இயக்கு வரைக்கோடு, இருபடி வரையின் இ. ப. மாற்றமாகிய வட்டத்தின் மையமாகிறது.

பயிற்சி :

1. S எனும் புள்ளிக்கு, இணைகோடுகளை இ.ப. மாற்றம் செய்ய



படம். 69

அவை, *S* வழியுள்ள ஒரு கோட்டில் அமைகின்ற புள்ளி களாகின்றன என நிறுவுக. [இணைகோடுகள், தனிக் கோட்டில் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகளாகும். *S* க்கு இ. ப. மாற்றம் செய்தால் *IJ* என்பது *S* எனும் புள்ளி யாகும். அதில் உள்ள *A* எனும் புள்ளி *S* வழி *a* எனும் கோடாகும். ஆகவே *A* வழிக்கோடுகள்—இணைகோடு கள்—*a* யில் அமையும் புள்ளிகளாகும்.]

2. இருபடி வரையின் சிறு அச்சின் நுனிகள், இருபடிவரை யின் குவியம் *S* க்கு, இ. ப. மாற்றம் செய்ய என்ன வாக மாறுகின்றன? [நுனிகள் இருபடிவரையில் சிறு அச்சு வெட்டும் புள்ளிகளாகும். ஆகவே இ.ப. மாற்றத் தில் சிறு அச்சின் இ. ப. மாற்றமாகிய *B* யிலிருந்து (குறிப்பு 4 பார்க்கவும்) வட்டத்திற்குள்ள தொடு கோடுகளாகும்).

3. ஒரு நாற்கரத்தின் ஒரு மூலைப்புள்ளியைப் பற்றிய இ.ப. மாற்றம் என்ன?

4. இருபடிவரையை அதன் ஒரு குவியத்திற்கு இ. ப. மாற் றம் செய்தால், அதன் இரண்டு துணையிய விட்டங் களின் இ. ப. மாற்றம் என்ன?

5. இருவட்டங்கள் *A* எனும் புள்ளியில் தொடுகின்றன. *PAQ* எனும் கோடு ஒரு வட்டத்தை *P* யிலும் இன் னொன்றை *Q* விலும் வெட்டுகிறது என்றால் *PQ* வில் உள்ள தொடுகோடுகள் இணைகோடுகளாகும். இதை *A* எனும் புள்ளிக்கு இ.ப. மாற்றம் செய்தால் வரும் தேற்றத்தை எழுதுக.

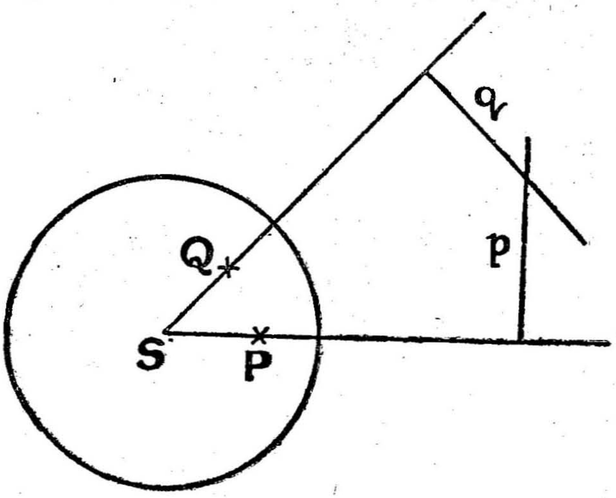
6. இருபடி வரைகள் இரண்டு குறிப்பிட்ட கோடுகளைத் தொடுமாறும், ஒரே புள்ளியை ஒரு குவியமாகவும் இருக்குமாறு உள்ளன. அவற்றின் மையங்களின் இயங்கு வழியைக் காண்க.

7. ஒரு குறிப்பிட்ட வட்டத்தைத் தொட்டு இன்னொரு கோட் டையும் ஒரு மாறும் வட்டம் தொடுகிறது என்றால் மாறும் வட்டமையத்தின் இயங்குவரை ஒரு பரவளைவு ஆகும். குறிப்பிட்ட வட்டமையத்திற்கு இதன் இ. ப. மாற்றம் என்ன? வேறு ஏதாவது ஒரு புள்ளிக்கு இதன் இ. ப. மாற்றம் என்ன?

8. ஒரு பரவளைவு ஒரு குறிப்பிட்ட இருபடிவரையைத் தொடுகிறது. அதன் குவியம், இருபடிவரையின் ஒரு குவியமாகும் என்றால் பரவளைவின் இயக்குவரை (Directrik) ஒரு வட்டத்தைத் தொடும் என நிறுவுக.

தேற்றம்: p,q என்பவை S எனும் புள்ளிக்கு P,Q எனும் புள்ளிகளின் இ.ப. மாற்றம் ஆனால் $\underline{|psq} = \hat{pq}$ (p, q எனும் கோடுகளிடையேயுள்ள கோணமாகும்.)

நிரூபணம்: S எனும் புள்ளியை மையமாகவுடைய வட்டத்திற்கு P,Q வின் இ.ப. மாற்றம் காண்போம். P,Q என்பவை புள்ளி



படம். 70

களானால் அவற்றின் இசைக்கோடுகள் *p*, *q* முறையே *SP, SQ* விற்குக் குத்தாகும். $\therefore \underline{|psq} = \hat{pq}$

பயிற்சி

1. (i) ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துசந்திக்கு, முக்கோணத்தின் இ.ப. மாற்றம் என்ன?

(ii) ஒரு பரவளைவின் இயக்கு வரையில் உள்ள புள்ளிக்கு, பரவளைவின் மாற்றம் என்ன?

(iii) ஒரு இருபடிவரையின் குத்துத்தொடுகோட்டு வட்டத்தின் மேலுள்ள புள்ளிக்கு, அதன் இ.ப. மாற்றம் என்ன?

2. S எனும் புள்ளியைக் குவியமாகவுடைய ஒரு பரவளை வுக்கு PQR என்பது சுற்று முக்கோணம் (circumscribing triangle). $\lfloor PSQ$ என்பது நிலையானால் Rன் இயங்குவரை என்ன?

3. ஒரு பரவளைவின் குவியத்திலிருந்து அதன் தொடுகோடு களுக்குள்ள குத்தடியின் இயங்குவரை இன்னொரு தொடுகோடு என இ,ப. மாற்றத்தால் நிறுவுக.

4. $ABCD$ எனும் நாற்கரம் ஒரு இருபடி வரைவயைத் தழுவி யுள்ளது. AC, BD ஒரு குவியத்தில் சந்திக்கின்றன என்றால் ACTγ BD எனவும் மற்றொரு மூலைக்கோடு இரு படிவரையின் இயக்குவரை எனவும் நிறுவுக.

5. ஒரு குறிப்பிட்ட பரவளைவுக்கு இரு மாறும் தொடு கோடுகள் நிலையான கோணத்தை உள்ளடக்கியுள்ளன என்றால் தொடுகோடு வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழி என்ன?

6. ஒரு மாறும் புள்ளி P யிலிருந்து ஒரு இருபடி வரைக் குள்ள தொடுகோடுகள், அதன் இயக்கு வரையை துணை யியப் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. என்றால் P யின் நியமப்பாதை என்ன ?

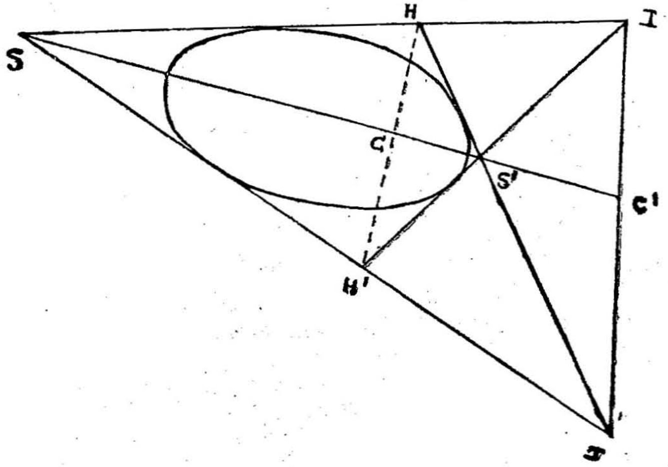
7. மூன்று இருபடி வரைகளுக்கு ஒரு புள்ளி பொதுக்குவிய மாக இருக்கிறது, அவற்றின் பொதுத் தொடுகோடு களின் சந்திகள், (இரண்டிரண்டு இருபடி வரைகளாகக் கொள்ள) ஒரு கோடமைவன என நிறுவுக.

8. ஒரு இருபடி வரையின் இ.ப. மாற்றப்புள்ளி அதன் குத்துத் தொடுகோட்டு வட்டத்தின் மேலானால், இ.ப. மாற்றம் செங்கோண அதிபரவளைவு ஆகும்.

தேற்றம்: பொதுக்குவிய இருபடிவரைகளை அவற்றின் ஒரு குவி யத்திற்கு இ.ப. மாற்றம் செய்ய, அவைகள் ஓரச்சு வட்டங்களாக மாறுகின்றன.

நிரூபணம்: I,J தனிப்புள்ளிகளாகுக; SS' பொதுக்குவியங் களாகுக. அப்போது IS, IS', JS, JS' எனும் நான்கு கோடுகள் கொண்ட நாற்கரத்தைத் தொடும் இருபடிவரைகளாக, பொதுக் குவிய வட்டங்கள் அமைகின்றன. S எனும் புள்ளிக்கு இ.ப.மாற்றம் செய்தால் SI, SJ எனும் தொடுகோடுகள் I, J ஆக மாறுகின்றன.

இருபடிவரைகள் IJ வழிச்செல்லும் இருபடிவரைகள் அதாவது



படம். 71

வட்டங்கள். அன்றியும் $S'I$, $S'J$ எனும் தொடுகோடுகள் அவ்வட்டங்கள் யாவற்றிலும் அமையும் இருபுள்ளிகள். ஆகவே இருபடிவரைகள் ஓரச்சு வட்டங்களாகின்றன.

தேற்றம்: ஓரச்சு வட்டங்களை அவற்றின் ஒரு எல்லைப்புள்ளிக்கு இ.ப. மாற்றம் செய்தால் அவை பொதுக்குவிய இருபடி வரைகளாகும்.

நிரூபணம்: S என்பது எல்லைப் புள்ளியாகுக. S' என்பது மற்றொரு எல்லைப் புள்ளியாகுக. SS' க்குக் குத்தாக $S'H$ ஒரு கோடாகுக. அப்போது எல்லா ஓரச்சுவட்டங்களுக்கும் $S'H$, எனும் கோடு Sன் இசைக் கோடாகும். Sக்கு இ.ப. மாற்றம் செய்தால், S என்பது IJ எனும் தனிக் கோடாகிறது. வட்டங்கள் யாவும் IJ வழிச் செல்வதால், வட்டங்கள் யாவும் IJ யிலிருந்து பொதுத் தொடு கோடுகள் உள்ள இருபடி வரைகளாகின்றன, IJ எனும் கோடு S ஆகிறது. அதாவது IJ யிலிருந்துள்ள தொடு கோடுகளின் சந்தி ஆகிறது. ஆகவே எல்லா இருபடி வரைகளுக்கும் S என்பது பொதுக்குவியம். (ii) $S'H$ என்பது IJன் இசைப்புள்ளியாக எல்லா இருபடி வரைகளுக்கு மையம் C ஆகிறது. அதாவது எல்லா இருபடி வரைகளும் S எனும் புள்ளியை பொதுக்குவியமாயும், C எனும் புள்ளியைப் பொது மையமாகவும் உடையன. அதாவது அவை யாவும் பொதுக் குவிய இருபடி வரைகளாகின்றன.

குறிப்பு 1. ஓரச்சு வட்டங்களின் பொது அச்சு (Radical axis) எல்லா வட்டங்களுக்கும் பொது நாண். ஆகையால் இது, I, J யிலிருந்துவந்த மற்றிரு தொடுகோடுகளின் சந்தி ஆகிறது. அதாவது மற்ற குவியமாகிறது.

குறிப்பு 2. ஓரச்சு வட்டத்தின் மற்ற எல்லைப்புள்ளி இருபடி வரைகளின் மையம் வழி SS' க்குக் குத்தான சிறு அச்சு (Minor axis) ஆகிறது.

பயிற்சி :

1. இரண்டு பொதுக் குவிய இருபடி வரைகள் வெட்டிக் கொண்டால் அவை ஒன்றுக்கொன்று குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் என நிறுவுக.

   (ஓரச்சு வட்டங்களின் இருவட்டங்களுக்குள்ள பொதுத் தொடு கோடு அவற்றைத் தொடும் புள்ளிகள் எல்லைப் புள்ளியில் செங்கோணத்தைத் தாங்கும் எனும் தேற்றத்தை இ. ப. மாற்றம் செய்க)

2. பல வட்டங்கள் AB எனும் இரு குறிப்பிட்ட புள்ளிகள் வழிச் சென்று, A வழியுள்ள இரு கோடுகளை PQ எனும் மாறும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன, PQ வின் தழுவு வரையைக் காணவும். [B எனும் புள்ளிக்கு இ.ப. மாற்றம் செய்க.]

3. பொதுக்குவிய இருபடி வரைகளின் குவியங்கள் S. H. ஆகும். S ஐக் குவியமாகவுடைய பரவளைவு சிறுஅச்சைத் தொடுகிறது. அதன் இயக்கு வரைக் கோடு (Directrix) H வழிச் செல்கிறதென நிறுவுக. ஒரு இருபடிவரைக்கும் பரவளைவுக்கும் உள்ள பொதுத் தொடுகோடு P.Q வில் அவற்றைத் தொட்டால் $\underline{|PSQ}$ எனும் கோணம் செங்கோணம் என நிறுவுக.

4. பொதுக் குவிய இருபடி வரைகளுக்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடு கோடுகள் சமகோணச் சாய்வில் உள்ளன. இதன் இ. ப. மாற்றத்தால் ஓரச்சு வட்டப் பண்பு யாதெனக் காண்க.

5. "ஓரச்சு வட்டங்களுக்கு, ஒரு புள்ளியின் இசைக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள்" எனும் தேற்றத்தை இ.ப. மாற்றம் செய்து பொதுக்குவிய இருபடி வரைகளின் பண்பு ஒன்றைக் காண்க.

பயிற்சி (1) பொது

6. ஒரு பரவளைவின் இயக்கு வரையில் உள்ள ஒரு புள்ளிக்கு இ.ப.மாற்றம் செய்தால் பரவளைவின் மாற்றம் செங்கோண அதிபரவளைவு எனக் காண்க.

7. "ஒரு பரவளைவைச் சுற்றியுள்ள முக்கோணத்தின் குத்து சந்தி அதன் இயக்கு வரையில் உள்ளது" என நிறுவுக.

8. ஒரு புள்ளியைப் பொதுக்குவியமாகவும் ஒரு கோட்டை அதன் இயக்குவரையாகவும் உடைய இருபடி வரைகளுக்கு ஒரு புள்ளியின் இசைக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள் என நிறுவுக.

9. ஒரு செங்கோண அதிபரவளைவில் வரையப்பட்ட முக்கோணத்தின் குத்துசந்தி H, அந்த வரையில் உள்ளது Hக்கு இ.ப. மாற்றம் செய்தால் வரும் தேற்றத்தை எழுதுக.

கலைச்சொற்கள்

Absolute Line	—	தனிக் கோடு
Absolute Points	—	தனிப் புள்ளிகள்
Conic-Eleven Point	—	பதினொன்று புள்ளி இருபடி வளை
Conic Envelope	—	தழுவு இருபடி வரை
Incidence - Proposition of	—	அமைவுத் தேற்றங்கள்
Involutions - Range	—	அடுக்கு வரிசை
Involution - Pencil	—	அடுக்குக் கற்றை
One-One Correspondence	—	ஒன்றுக்கு ஒன்றேயெனும் தொடர்பு
Perspective Ranges	—	பார்வை வரிசை
Related Pencil	—	தொடர்புடைக் கற்றை
Related Ranges	—	தொடர்புடை வரிசை
Reciprocations	—	இசைப் பண்பு மாற்றம் (இ. ப. மா)
Reciprocation - Point	—	புள்ளி ,,